PERFILES EDUCATIVOS

TERCERA ÉPOCA VOLUMEN XXXVIII NÚMERO ESPECIAL

Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación / Universidad Nacional Autónoma de México
ISSN 2448-6167
EJEMPLAR $ 100.00

Coordinador del número: Ricardo Cantoral
Editora: Gabriela Arévalo Guízar
Corrección: Cecilia Fernández Zayas
Diseño editorial y formación: Ernesto López Ruiz

Portada: fragmento del mural *Tepito Arte Acá*, obra plástica de Daniel Manrique, que decora la Facultad de Arquitectura de la UNAM
IISUE/AHUNAM/Macrouniversidades/SN
Fotografía y edición: Fernando Hernández Olvera

Perfiles Educativos ha sido aprobada para su inclusión en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica (IRMICYT), del CONACYT, así como en los índices y las bases de datos: SCOPUS (Elsevier, Bibliographic Databases), Scientific Electronic Library Online (Scielo México), Scielo Citation Index (Scielo-Thomson Reuters), Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (REDALYC), Índice de Revistas sobre Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE), Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal (LATINDEX) y Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades (CLASE).

Perfiles Educativos es una publicación que da a conocer principalmente resultados de la investigación en educación. Su línea editorial da cabida a los diversos aspectos de indagación, pues considera que las ciencias de la educación se han constituido en un campo inter y pluridisciplinario. La educación es un campo de conocimiento y también un ámbito de intervención; es por ello que en la revista se publican resultados de investigaciones con referentes teóricos o empíricos, desarrollos teóricos y reportes de experiencias educativas con un fundamento conceptual que por su carácter merezcan ser difundidos. *Perfiles Educativos* es una revista de intercambio y debate abierta a todos los interesados en el campo de la investigación educativa.

Suscripciones anuales: México $500.00 M.N. Extranjero: USD 50.00. Precio del ejemplar: $100.00 M.N. Información sobre suscripciones a los teléfonos 56 22 69 95, ext. 2023. Impresión: Calle 5 de febrero núm. 2309, Col. San Jerónimo Chicahualco, C.P. 52170, Metepec, Estado de México, teléfono 722 1991 345. Certificado de licitud expedido por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas, el 16 de noviembre de 1981. *Perfiles Educativos* es nombre registrado en la Dirección General de Derechos de Autor. Se tiraron 500 ejemplares en diciembre de 2016.

Índice

Editorial
¿Hay esperanza para la enseñanza de las matemáticas?

A pesar de que las matemáticas forman parte de la vida cotidiana y nos saltan al paso en cualquier lugar (juegos infantiles, compra de alimentos, transacciones comerciales, en el trabajo, etcétera); además de ser la base que hace posible la operación y fabricación de los miles de objetos que forman parte de nuestras actividades cotidianas, sorprende que sean tan impopulares (UNESCO/Centro Cultural Conde Duque, 2006).

Es tal la importancia de las matemáticas que éstas forman parte de los conocimientos básicos de los currículos escolares de todo el mundo, pues se considera que "la escuela debe contribuir al desarrollo de la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar y comprender el mundo real, tanto en lo referido a la vida en el entorno social inmediato, como a los ámbitos de trabajo y de estudio" (UNESCO, 2009: 33).

No obstante, es frecuente escuchar quejas de muchas personas en el sentido de haber tenido experiencias desfavorables y hasta traumáticas con la enseñanza de las matemáticas, independientemente del nivel educativo de que se trate. Lo anterior ha llevado a generalizar un estereotipo de esta disciplina como algo aburrido y difícil, de lo que no se quiere saber mucho; un filtro en el sistema escolar, cosa de "cerebritos", o como una cosa alejada de la vida práctica.

Los malos resultados que sostenidamente se obtienen en las pruebas estandarizadas que han procurado medir el desempeño de los alumnos en esta área a nivel nacional e internacional (ENLACE, EXCALE, PLANEA, TERCE y PISA), muchas veces sirven para reafirmar estas creencias, así como para sentar al sistema escolar en el banquillo de los acusados, ante los pobres resultados obtenidos.

Los avances que se han dado durante las últimas décadas acerca de la enseñanza y la didáctica en áreas como el lenguaje y las matemáticas han puesto en evidencia la importancia que tienen los ámbitos sociales y culturales en el aprendizaje de estas disciplinas y, consecuentemente, la necesidad de contextualizar los procesos de enseñanza en los ámbitos particulares en que se desarrollan los alumnos en su vida cotidiana, para que logren dotar de un sentido práctico a los conocimientos que brinda la escuela. La cuestión es cómo pueden los alumnos aprender algo y adquirir el gusto por ello cuando no lo comprenden ni les hace sentido en su contexto particular.

En 2006, la UNESCO y el Centro Cultural Conde Duque promovieron en España la exposición "¿Por qué las matemáticas?", con la intención de incidir en un problema que consideraron crucial en la enseñanza de esta disciplina. En esa ocasión los participantes señalaron que dicha pregunta proviene de otra que se ha evadido siempre en las clases de matemáticas, por suerte para los profesores: "y esto, a mí, ¿para qué me sirve?". Ésta es, en el fondo, la pregunta que da título a la exposición. También indicaron que, si esa pregunta se trasladara a los alumnos, pocos sabrían responderla, más allá de algunas frases retóricas, a pesar de ser la clase más importante de todo el currículo (UNESCO, 2006).[1] Esto se debe al carácter poco práctico y descontextualizado que tradicionalmente ha imperado en la enseñanza de las matemáticas.

Lo anterior lleva a reflexionar sobre la necesidad de transformar los métodos de enseñanza, y adecuarlos a los contextos sociales y culturales en que se desenvuelven los alumnos, lo cual abre un nuevo umbral de esperanza para que los escolares adquieran los conocimientos que se reconocen como fundamentales para desarrollarse en plenitud en el mundo actual.

Por lo anterior, es un placer para todos los que colaboramos con la revista *Perfiles Educativos* contar con la participación del Dr. Ricardo Cantoral para coordinar este número especial dedicado a la enseñanza de las matemáticas. Cabe destacar que el Dr. Cantoral es uno de los especialistas más reconocidos nacional e internacionalmente en este tema, además de ser el director de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.

Actualmente el Dr. Cantoral coordina los esfuerzos de un grupo de profesores de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca en su programa de posgrado denominado Maestría en Enseñanza de las Matemáticas para la Educación Secundaria, para abordar el tema de la enseñanza de las matemáticas. Este número especial, integrado por nueve trabajos (incluida la presentación) abre un panorama esperanzador en nuestro país, dado que conjuga dos aspectos de suma importancia en el trabajo de investigación social: a) una propuesta novedosa que, desde la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, procura brindar una alternativa a un problema que resulta crucial para el sistema educativo mexicano; y b) una visión práctica y coordinada que permite vislumbrar la aplicación de la teoría a partir de los trabajos de investigación que integran la propuesta.

En conjunto, como lo señala el Dr. Cantoral en su presentación, su propuesta se contextualiza en escenarios sociales y culturales específicos con la intención de elaborar alternativas que surjan de las prácticas socialmente compartidas por las comunidades, a partir de las realidades tanto de los que aprenden como de quienes enseñan.

La esperanza estriba en que la alternativa contenida en estos trabajos contribuya a que la enseñanza de las matemáticas se dote de un sentido práctico que permita responder, tanto a alumnos como a docentes, para

1 ¿Por qué las Matemáticas?, UNESCO, Portal, 2006, en: http://www.oei.es/historico/noticias/spip.php?article4097 (consulta: 6 de diciembre de 2016).

qué les sirven las matemáticas en la vida cotidiana; e incluso, para que adquieran el gusto por las mismas.

Estamos ciertos que los esfuerzos realizados por el Dr. Cantoral —y por los profesores e investigadores que lo acompañan en la realización de este número especial— serán ampliamente valorados por nuestros lectores por su aporte para resolver un problema relevante que afecta persistentemente a nuestro sistema escolar.

Alejandro Márquez Jiménez

Referencias

UNESCO (2009), *SERCE: Aportes para la enseñanza de las matemáticas*, Santiago, UNESCO-OREALC, en: http://unesdoc.unesco.org/images/0018/001802/180273s.pdf (consulta: 6 de diciembre de 2016).

UNESCO/Centro Cultural Conde Duque (2006), "¿Por qué las matemáticas? Una exposición internacional realizada por iniciativa de la UNESCO", Catálogo, en: http://www.oei.es/historico/noticias/spip.php?article4097 (consulta: 6 de diciembre de 2016).

Presentación
Educación alternativa: matemáticas y práctica social

Ricardo Cantoral*

Introducción

Aunque se acepta en el mundo académico que la matemática es universal, debemos enfatizar que su enseñanza no lo es. Ésta, la enseñanza de las matemáticas, se sitúa en escenarios sociales y culturales específicos que habrán de tomarse en cuenta al momento de elaborar propuestas pedagógicas viables. Ello exige de enfoques alternativos que partan de la realidad de quien aprende y de los contextos de su enseñanza. Esto fue lo que nos propusimos hacer conjuntamente con los colegas de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca en su programa de posgrado denominado Maestría en Enseñanza de las Matemáticas para la Educación Secundaria cuando, en un acuerdo de colaboración institucional, decidimos elaborar una propuesta alternativa para el caso de las matemáticas a partir de prácticas socialmente compartidas en las comunidades de dicho estado. Para ello resultó fundamental asumir que en estas propuestas de desarrollo educativo se tendrían que considerar tanto las realidades del que aprende como las de quienes enseñan, y que habrían de estructurarse atendiendo al escenario donde se contextualizan los saberes específicos.

Esta postura permitió al grupo de Matemática Educativa que se ocupa de la socioepistemología, esto es, del estudio sobre la *construcción social del conocimiento*, el posicionarse en una esquina un tanto distante de aquella que tienen las visiones clásicas o *platonistas* del conocimiento matemático, las cuales lo reducen a sus aspectos instrumentales y formales y hacen que pierda su naturaleza funcional, su *valor de uso*.

Estos esfuerzos descansaron en un marco teórico emergente para la investigación y el diseño educativo en el ámbito de las matemáticas escolares que denominamos *teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Constituye un programa de investigación de largo aliento que se apoya en la socioepistemología como sistema de razón, y se ocupa del problema que plantea la constitución del saber matemático entre la población. Se trata, entonces, de una teoría cuyos constructos son elaboraciones con base empírica que no nace de la yuxtaposición de teorías existentes, sino que se nutre del análisis sistemático de la realidad educativa nacional. Bajo este enfoque socioepistemológico se asume la legitimidad de toda forma de saber,

* Investigador del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), del Instituto Politécnico Nacional (México) y coordinador de este número especial dedicado al tema de la matemática educativa y la práctica social.

sea éste popular, técnico o culto, pues todas ellas en su conjunto constituyen la sabiduría humana. Otros enfoques contemporáneos examinan sólo alguna de las formas del saber (Cantoral *et al*., 2015).

Veamos algunos asuntos de delimitación teórica sobre el enfoque: la palabra socioepistemología plantea en sí misma una relación con el saber, una metáfora que ubica al saber como construcción social del conocimiento. Ahora bien, dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema didáctico le obliga a una serie de modificaciones sobre su estructura y su funcionamiento, lo cual afecta también a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. Al dar al objeto de saber una forma didáctica se producen discursos que facilitan la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y, en consecuencia, el saber se despersonaliza y descontextualiza. Dichos consensos se alcanzan a costa de una pérdida del sentido y del significado original, y reducen el saber a temas aislados y secuenciados, a menudo denominados "contenidos" o "unidades temáticas" de una asignatura. Los discursos que validan la introducción del saber matemático al sistema didáctico, y que legitiman un nuevo sistema de razón, reciben el nombre genérico, en esta teoría, de *discurso matemático escolar*, y son vistos como medio para lograr una participación en el ámbito didáctico. El consenso, de este modo, es logrado a través de ciertas pérdidas que son la antesala de formas de exclusión derivadas de la propia hegemonía que conlleva.

El programa socioepistemológico se ha propuesto el rediseño del discurso matemático escolar como una forma de atender problemas sociales y culturales que acompañan la actividad didáctica en matemáticas. Por ejemplo, interesa atender al fenómeno de masificación de los sistemas educativos sin considerarlo, *a priori*, un rasgo negativo de la educación contemporánea. Incursionamos también en el análisis del impacto que produce la traducción de obras educativas de una cultura o una lengua a otras, más ampliamente al estudio de los procesos de subordinación colonia-metrópoli. Se investiga al empoderamiento docente relativo al saber para enfrentar la exclusión que produce el discurso matemático escolar y las que se derivan también de cuestiones de género, etnia, condición física, social o laboral.

Bajo este programa de investigación, los conceptos y procesos matemáticos que se ponen en funcionamiento en un acto didáctico pueden no ser objetos matemáticos en el sentido clásico, es decir, formas de saber culto aceptados por la comunidad matemática o por la noosfera educativa expresados en el currículo oficial, ya sea explícita o tácticamente. Pueden ser nociones, preconceptos, ideas en su fase germinal, acciones, actividades y prácticas que participan de otros ámbitos de la actividad humana, como la construcción de artefactos, las innovaciones tecnológicas, diseños de ingeniería; o también, del ámbito de las ciencias, las técnicas, las artesanías, las actividades comerciales y así un largo etcétera.

Esto es así porque las matemáticas, desde la mirada socioepistemológica, son consideradas parte esencial de la cultura, un elemento "vivo" que se crea "fuera" del aula, pero se recrea "dentro" de ella: las matemáticas no se inventaron para ser enseñadas y sin embargo se enseñan; se las usa en distintos escenarios, digamos que "viven" a través de las acciones más básicas de toda actividad humana: construcción de vivienda, siembra y tejido, elaboración de protocolos para el empleo de fármacos o de tóxicos, elaboración de recetas de cocina, diseño de depósitos de vino, cálculo de dosis médicas, explicitación de conjeturas matemáticas, coordinación de movimientos de un piloto al aterrizar en una pista complicada, matematización de fenómenos biológicos, toma de decisiones para inversiones financieras, interpretaciones de la opinión pública, simulación de flujos continuos, trueque en mercados tradicionales, estudio de la consolidación de suelos finos saturados, de mecanismos regulatorios de temperatura en la industria química… Están presentes también en la educación formal, en las aulas de ciencias, física, química, biología, tecnología, taller, lectura y comprensión… y, por supuesto, en la clase de matemáticas. Están presentes en las prácticas cotidianas de todos los seres humanos cuando clasifican, predicen, narran, comparan, transforman, estiman, ajustan, distribuyen, representan, construyen, interpretan, justifican, localizan, diseñan, juegan, explican, cuentan o miden.

Este escrito se basa en las primeras contribuciones de los años noventa (Cantoral, 2013) relativas a tres prácticas específicas: predicción, estabilidad y acumulación, desarrolladas por Cantoral (1990), Farfán (1993) y Cordero (1994), respectivamente. Dichas prácticas se han utilizado para diseñar intervenciones didácticas que modifican la comprensión de nociones teóricas clásicas en matemática educativa, así como las nociones de *aprendizaje* o *contrato* se amplían hacia un ámbito didáctico no escolarizado donde puede no corresponderles un saber matemático institucional (aula extendida). El aprendizaje es una noción polisémica que igual es utilizada por el programa conductista (aprendizaje como cambio de conducta), los enfoques cognitivos (aprendizaje como cambio de representación) o los encuadres socioculturales (aprendizaje como cambio de práctica). El contrato, por su parte, concierne a las relaciones explícitas o implícitas entre profesor y alumno cuando un saber escolar está en curso de constitución; se incluyen ahora consideraciones de orden social y cultural que contemplan circunstancias históricas, culturales e institucionales para la construcción y difusión de significados.

Thomas Kuhn influyó en nuestro enfoque al modificar nuestra mirada sobre la noción de *cambio científico*, o más específicamente, sobre la idea de *progreso*. En el origen del programa socioepistemológico nos preguntamos sistemáticamente qué significa mejorar los procesos de aprendizaje matemático, cuáles son las condiciones que los favorecen y cuáles las que los obstaculizan. Así emergió la noción de *discurso*, primero como discurso matemático para la escuela (Ímaz, 1987) y como discurso matemático escolar (Cantoral, 1987); en ambos casos como forma de articular, problematizando, las nociones de progreso y aprendizaje que brindaron la posibilidad de intervención educativa. También influyeron en nuestra mirada P. Freire, J. Piaget, F. Varela, C. Ímaz y M. Artigue; y con la misma fuerza Struik, Koyré, Lakatos, Toulmin y Bachelard, por su enfoque de la historia y la filosofía de las matemáticas, o más ampliamente de la epistemología de las ciencias, centrado en aspectos contextuales, conceptuales y procedimentales, más que en logros y progresos en el terreno conceptual. Estos autores resultaron cruciales para el desarrollo del programa socioepistemológico. Nos ayudaron a explorar cómo entender el aprendizaje matemático sin atribuir un sentido de verdad absoluto y universal (programa deductivista) o una única racionalidad válida (racionalidad positivista).

Pronto se planteó, en el programa socioepistemológico, la necesidad de una reconstrucción racional del saber matemático que se apoyase en una racionalidad contextualizada de quien aprende, que acompañase al programa del relativismo epistemológico acerca del qué, cómo, cuándo y por qué lo aprende. De este modo se articuló la noción de cambio con una concepción del aprendizaje relativa a los contextos y *prácticas de referencia*. La noción de práctica de referencia se extrae de las investigaciones impulsadas por Farfán (1993, 2012) sobre los procesos de matematización de la ingeniería en el siglo XVIII. La práctica de referencia está estructurada y estructura al quehacer matemático y científico de una época que va de la conformación de la *École Polytechnique* en la Francia napoleónica, hasta el surgimiento de la figura del matemático profesional tras la Primera Guerra Mundial. Con estos hallazgos, y mediante una gran cantidad y variedad de evidencia empírica, el programa socioepistemológico fortalece su mirada crítica hacia la tradición formalista y el enfoque constructivista de aquellos años. Ni la tradición formalista, con su énfasis en el problema del conocimiento desde el punto de vista de los fundamentos o de la estructura formal, ni el enfoque constructivista, que si bien relativiza el asunto de la lógica de la demostración e indica las heurísticas del descubrimiento, no abandona su predilección por el conocimiento matemático como centro de metáforas teóricas, parecieron entonces adecuados.

Origen de la teoría y de sus dimensiones

La socioepistemología nace en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de los ochenta y se extiende hacia Latinoamérica y otras latitudes durante los noventa con el objetivo de atender colectivamente un problema mayor: explorar formas de pensamiento matemático, fuera y dentro de la escuela, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población. Sabíamos que la manera de enseñar está estructurada por la institución que lleva a cabo la enseñanza (la acción didáctica en el aula, la familia, la comunidad, la escuela o la vida cotidiana) y que esto, a su vez, es estructurante de la socialización del conocimiento y, en consecuencia, de los procesos de pensamiento involucrados. En Cantoral y Farfán (2003; 2004) se proclama aquello que se tornaría en consigna: no más una didáctica sin alumnos, pero menos aún una didáctica sin escenarios socioculturales. El nuevo reto era pasar la mirada del concepto a las prácticas. Si bien comenzamos con el estudio de fenómenos didácticos de manera sistémica, tomando los tres polos básicos del triángulo didáctico —el contenido de la enseñanza, el sujeto que aprende y el que enseña, regulados por un medio didáctico controlado—, pronto advertimos la necesidad de realizar sucesivas reconstrucciones a nivel teórico. A las situaciones de aprendizaje había que incorporarles dimensiones socioculturales que significasen aquello que originó al conocimiento matemático, pero, sobre todo, que sigue de algún modo vivo mediante *su uso* en los entornos de los que aprenden. Ampliamos las ideas de aula, saber y sociedad para aceptar, sobre la base de evidencia empírica acumulada, que tal reformulación requería de incorporar una cuarta dimensión: la dimensión social y cultural. Con su inserción, las demás dimensiones se transformaron y se abrió el estudio sistémico de la constitución del saber matemático desde una perspectiva socioepistemológica, es decir, enfatizando los procesos de construcción social del conocimiento y de su difusión institucional. El programa quedó finalmente conformado por cuatro dimensiones: epistemológica, didáctica, cognitiva y socio-cultural. Ejemplos del modelo ampliado se encuentran en Reyes-Gasperini (2016), donde el empoderamiento se incorpora a la socioepistemología; Carrillo (2006), donde se incorporan factores afectivos en la construcción social del conocimiento matemático; y Covián (2005), quien analiza el carácter normativo de las prácticas sociales y da un paso más hacia una caracterización del aprendizaje que vincula al individuo con su colectividad.

Actualmente se postula que para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento a nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social (Cantoral, 2013), se debe de problematizar al saber situándolo en el entorno de la vida del aprendiz, lo que exige un rediseño compartido, que oriente y estructure el discurso matemático escolar con conciencia de la alta valoración dada a las prácticas sociales. Las matemáticas, además, se han desarrollado bajo un estigma que las vincula con objetos abstractos, anteriores a la praxis social y externos al individuo; en nuestro programa se revierte esta idea: las matemáticas, como parte de la cultura, se desarrollan por mecanismos sociales de producción de significado. Las lenguas, las leyes, la moral y la religiosidad son emergentes sociales que no podrían ser creados por sujetos individuales, sino por colectivos normados en el curso de su evolución. Por tanto, surge la pregunta clave sobre qué produce la norma. La norma es en sí misma un emergente social que regula el desarrollo colectivo. Esta idea es la que empleamos al afirmar que la práctica social es un emergente social con nuevas funciones de tipo normativo, identitario, pragmático y discursivo-reflexivo. La noción de *práctica social* con funciones delimitadas es un emergente teórico que aparece al incorporar la dimensión social al sistema "epistemológico-didáctico-cognitivo" de la didáctica fundamental y, hoy en día, es una noción integral que sustenta a la teoría misma. Dado que las distintas acepciones que fuimos usando para la práctica social no conseguían explicar toda la complejidad de lo estudiado, se planteó entonces a la propia noción de práctica social como objeto de estudio. Quisimos ubicar con rigor el papel de la práctica social en el paso del conocimiento al saber para hablar con sentido de una socioepistemología, y no de una epistemología en sí. Al respecto, resultó útil asociar "uso" a "conocimiento" para dar lugar al "saber"; surgió así una noción de aprendizaje situacional, o aprendizaje en contexto.

Sostenemos que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas. Esto no significa que todo conocimiento obedezca a una necesidad de naturaleza práctica inmediata, a una cuestión concreta. Los historiadores de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones o generalizaciones de lo empírico. Más bien, nuestra hipótesis tiene una orientación socioepistemológica puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen, y las actividades mediante las cuales —y en razón de las cuales— dichos conocimientos son producidos. Bajo este enfoque, las matemáticas están en la base de la cultura humana igual que lo están el juego, el arte o el lenguaje. Nuestras investigaciones han mostrado, durante los últimos años, la pertinencia y consolidación de esta postura de acuerdo con los resultados obtenidos y la elaboración teórica. Se ha seguido una aproximación sistémica a la investigación que articula las cuatro dimensiones del saber (construcción social del conocimiento): su naturaleza epistemológica (forma en que conocemos), su tesitura sociocultural (énfasis en el valor de uso), los planos de lo cognitivo (funciones adaptativas) y los modos de transmisión vía la enseñanza (herencia cultural).

El saber, como construcción social del conocimiento, se constituye mediante procesos deliberados para el uso compartido de conocimiento. Se trata de mecanismos constructivos, altamente sofisticados y de carácter social, que producen interacciones, explícitas o implícitas, entre mente, conocimiento y cultura. Para el análisis del saber, éste debe problematizarse. Específicamente, el saber trata de la polifonía entre procesos avanzados de pensamiento, la epistemología de las matemáticas y las prácticas humanas especializadas. Así, el saber matemático (*saber sobre algo*), no puede reducirse a una definición formal, declarativa o relacional; a un conocimiento matemático (*conocimiento de algo*), sino que habrá de ocuparse de su historización y dialectización como mecanismos fundamentales de constitución.

Ejemplifiquemos con problemáticas ligadas al análisis matemático que resultaron útiles para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PyLV) (Cantoral y Farfán, 1998). Con base en la elaboración de cuatro tareas, que buscaban reconocer los ceros de las derivadas hasta el orden tres de una función analítica dada gráficamente, se llevaron a cabo proyectos de posgrado a fin de mostrar que a pesar del dominio que un estudiante pueda tener de la derivación como proceso y del cálculo de derivadas simples y complejas, aunque sea capaz de reproducir el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente en un punto, o conozca algunos teoremas relativos a las derivadas de funciones reales de variable real, como aquel que señala que "si f es derivable en a, entonces es continua en a", aun con todo ello tendrá dificultades para articular e interpretar las derivadas sucesivas. Teóricamente anticipé que en la enseñanza del cálculo se produciría un singular fenómeno ligado al aprendizaje, con estudiantes y profesores. Diríamos que el discurso matemático escolar, en tanto sistema de razón, estructura a los actores educativos a través de una costumbre didáctica, produciendo un escaso entendimiento conceptual para la transferencia de significados. Sintéticamente produce una ausencia de noesis (aprensión conceptual del objeto) derivada de una falta de praxis (proceso de conocimiento y toma de conciencia). La noesis representa a la experiencia vivida en conjunto, mediante actos de comprensión enfocados sobre el objeto de la experiencia como la percepción, la imaginación, la conciencia o el recuerdo. Al respecto, el enunciado socioepistemológico en versión corta diría que *no hay noesis sin praxis.*

Sin el desarrollo del PyLV (praxis), es imposible que un estudiante aborde exitosamente un conjunto de tareas como las que veremos a continuación. Tendrá dificultades en asignar los significados asociados al tipo de relaciones f y f' o f y f'' (noesis), pues el discurso matemático escolar induce un énfasis mayor en las derivadas consecutivas o relaciones del tipo $f^{(\mathrm{n})} \leftrightarrow f^{(\mathrm{n}+1)}$, pero no analiza las del tipo $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+2)}$ y menos aún $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+3)}$. La razón de este hecho está ligada a la forma en que se introduce al aula el tema de la derivada de una función real. La presentación escolar utiliza al límite del cociente incremental, y de existir le denomina derivada de f en a. La segunda derivada de la función f se define como la derivada de la función derivada, la tercera como la derivada de la función derivada segunda, y así sucesivamente.

El concepto a definir es la primera derivada de una función, de manera que las derivadas quedan anidadas: $((((f)')')\ldots)'$. Esto explica el encadenamiento entre una derivada y su consecutiva $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+1)}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. De ahí la hipótesis de que la derivada sólo podrá ser utilizada en escenarios diversos cuando se articulen las derivadas sucesivas hasta establecer relaciones de subida y bajada: $f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \ldots$ y $\ldots f''' \rightarrow f'' \rightarrow f' \rightarrow f$. Tras el estudio relatado en Cantoral (1990; 2013), se problematizó al saber y se produjo una ruta de solución didáctica: la noción matemática de derivada, que acompaña a la práctica de predecir, será estabilizada entre los estudiantes sólo cuando la derivada sea usada como una articulación conveniente de las derivadas sucesivas.

Sostuvimos desde esos años que la razón principal por la que no era posible articular las derivadas sucesivas en el aula obedecía a la ausencia de escenarios socioculturales de intermediación que trataran con procesos de cambio y variación, puesto que la limitante de orden fisiológico plantea al ser humano una incapacidad funcional: no estamos dispuestos fisiológicamente para percibir variaciones de orden grande; particularmente dicha limitación se da desde el orden tres. Nos es imposible entender a cuatro personas hablando simultáneamente; no podemos "recordar" corporalmente movimientos con aceleración variable; en la esfera del habla, usamos tres estados para describir adverbios de tiempo: antes – ahora – después.

Concluimos que, ante la incapacidad de percibir variaciones a voluntad, debemos articular a las variaciones de orden menor y asumir como constantes a las de orden mayor. Por ello, en la interacción verbal, solemos reducir las expresiones comparativas a dos variaciones con tres estados. El conjunto de estados $\{E_i\}_{i=1,2,3}$ y el conjunto de variaciones $\{v_j\}_{j=1,2}$ se relacionan entre sí: $E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3$. Si los estados no son consecutivos, se requiere una articulación de variaciones: $E_1 \xleftrightarrow{v_1 \oplus v_2} E_3$. Ambas formas de variación quedan ilustradas como sigue:

$$\overbrace{E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3}^{v_1 \oplus v_2}$$

Ejemplifiquemos lo anterior con un caso sencillo. Consideremos que E_1 representa la altura actual de un árbol y E_2 su altura un año después; v_1 muestra entonces el incremento de la altura, su variación de crecimiento. Si E_3 es la altura del árbol dos años después, v_2 exhibe el incremnto en la altura durante el segundo año. De modo que $v_1 \oplus v_2$, en nuestro modelo, es el cambio del cambio: el cambio de los incrementos. En términos dinámicos esto se expresaría como una función del tiempo, localmente lineal: $v_1 \oplus v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$. Este objeto formal, si bien perceptible y calculable, resulta complicado de tratar para variaciones de orden mayor: $[v_1 \oplus v_2] \oplus [v_2 \oplus v_3]$. Mientras que resulta ininteligible para estudiantes si consideramos un orden mayor al anterior: $[[v_1 \oplus v_2] \oplus [v_2 \oplus v_3]] \oplus [[v_2 \oplus v_3] \oplus [v_3 \oplus v_4]]$.

Cabe preguntarse si dichas limitaciones sobre la interpretación de las variaciones de orden superior tienen una contraparte cultural localizable en prácticas cotidianas. Esto fue confirmado experimentalmente, pues las comparaciones de "tres estados" caracterizan a nuestras habituales formas discursivas, culturalmente aceptadas, para una comunicación. Estas formas tripartitas de estados vecinos se construyen colocando invariablemente dos estados extremos, el uno y su opuesto, a fin de comparar la evolución de una magnitud o un atributo. Se le nombra E_1 al menor de los estados y E_3 al mayor. Se construye entonces un estado intermedio de transición, E_2, con características ambivalentes al participar de características de los estados extremos. Ejemplos de la vida cotidiana sirven para comparar estados: para comparar temperaturas utilizamos los vocablos frío, tibio y caliente, correspondientes respectivamente con E_1, E_2 y E_3. Para identificar estados intermedios y dar variabilidad al proceso tratando con estados y posiciones intermedias, usamos adverbios de cantidad: muy, mucho, bastante, poco, demasiado, más, menos, tan, tanto… Algo caliente puede estar aún "más caliente", y se dice "está muy caliente"; algo "por debajo" de frío es muy frío. No tan caliente es "apenas caliente", "casi caliente" o de plano tibio. Así, en nuestros discursos empleamos sistemáticamente el PyLV. Las alturas de las personas se distinguen entre bajo, medio y alto; las posiciones de cercanía relativas entre cerca, aquí y lejos; etcétera. Mediante el uso cotidiano de la lengua natural se han ido construyendo adverbios de modo, tiempo, ubicación, cantidad o grado para tratar con situaciones variacionales: a) adverbios de modo (bien, regular, mal); b) adverbios de tiempo (ayer, hoy, mañana); y c) adverbios de cantidad o grado (nada, poco, mucho).

Todos estos adverbios poseen una estructura simétrica y reversible que permite al discurso una flexibilidad mayúscula. Las relaciones grande-pequeño o pequeño-grande se traducen de inmediato en relaciones de crecimiento, decrecimiento o estabilidad. El uso del lenguaje ordinario antecede o acompaña al uso de las variaciones en matemáticas, pues el estudiante en un curso de cálculo ha desarrollado previamente un sistema discursivo para tratar con el cambio y la variación. Sin embargo, en la enseñanza este acontecimiento de orden sociocultural no forma parte del contenido escolar por las restricciones debidas al discurso matemático escolar. Si acaso en su discurso didáctico el docente será quien vehicule estrategias y esquemas variacionales, como reporta experimentalmente Reséndiz (2004).

Utilicemos una analogía entre las flexiones adverbiales y la variación de funciones matemáticas. Llamamos a cada una de estas variaciones, tanto lingüística como matemática, como variaciones de forma I y II. Las variaciones de la forma I siguen un patrón de crecimiento secuencial, paso a paso: dado un estado se continúa con el siguiente estado o con su antecesor; mientras que las variaciones de la forma II siguen un patrón de saltos no unitarios: dado un estado se pasa hacia algún estado posterior o anterior no consecutivo. La dificultad para el análisis de las variaciones del tipo II radica en la no existencia de un sistema apriorístico de referencia, un sitio que sirva de origen para medir la variación; el cambio como tal no existe sin referenciales, por lo que ha de ser construido en cada caso. El problema es quién construye el origen y el sistema de referencia, esto es, ¿respecto de qué? Decidir qué cambia no basta para estudiar el cambio. Quizá por la ausencia de dicho origen en el sistema de referencia no dispongamos de palabras para hablar de la tercera o cuarta o quinta… derivada. ¿Por qué razón no existe palabra para describir al cambio de la aceleración? La posición corresponde a f, la velocidad a f' y la aceleración a f'', pero no hay palabra que acompañe a la tercera derivada: ¿qué concepto es f'''? Algo semejante ocurre con el significado gráfico de las derivadas. La función f representa a la ordenada, f' la pendiente de la recta tangente y f'' la concavidad de la curva, pero ¿cuál es el significado para f'''?

Esta dificultad se asoma ya desde el manejo de la lengua misma, pues usamos calentar para dos variaciones distintas: $\text{Frío} \xrightarrow{entibiar} \text{Tibio}$, $\text{Tibio} \xrightarrow{calentar} \text{Caliente}$, $\text{Frío} \xrightarrow{calentar} \text{Caliente}$.

Equivalentemente, tendremos la misma situación para la relación inversa: $\text{Tibio} \xleftarrow{templar} \text{Caliente}$, $\text{Frío} \xleftarrow{enfriar} \text{Tibio}$. En la física clásica se entiende que no usaran una tercera variación, pues la segunda ley de Newton estipula que en el sistema masa-aceleración, masa y aceleración son constantes, por lo que no se precisa de la tercera derivada. No obstante, debe buscarse una respuesta en el marco del discurso matemático escolar. Para encarar esta tarea se han realizado multitud de experimentos bajo la perspectiva socioepistemológica.

En todos ellos, el interés ha sido explorar cómo los estudiantes comparan, secuencian y articulan variaciones de orden mayor. Por motivos de espacio no indico las numerosas referencias que convendría incluir al respecto.

Consideraciones finales

Podemos decir, sin temor a equivocarnos, que el PyLV ha sido la fuente de inspiración empírica del programa socioepistemológico; la gran cantidad de investigaciones realizadas por el grupo de trabajo lo constata. Sin embargo, no han sido los únicos; más recientemente los trabajos sobre lo periódico, lo proporcional, lo analítico, lo lúdico, lo profesional, lo cultural y lo artesanal, entre otros que se llevan a cabo en la socioepistemología, muestran una ruta nueva de pesquisa, pues a la par que incorporan dimensiones claramente sociales como el empoderamiento o la exclusión, centran su atención en la proporcionalidad como práctica de referencia para un conjunto amplio de saberes (Arrieta y Díaz, 2015; Reyes-Gasperini, 2013). Del mismo modo encontramos desarrollos innovadores al analizar procesos de desescolarización del saber en prácticas como el malabar circense, y la siembra y el tejido en comunidades originarias (Espinoza, 2014; Yojcóm, 2013; respectivamente).

Este capítulo tuvo la intención de presentar al lector interesado en los procesos de construcción social del conocimiento elementos de una teoría emergente: la socioepistemología de la matemática educativa. Este encuadre teórico surge, como dijimos, en un cruce de caminos en un intento por explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las matemáticas apoyándonos en la noción de *práctica social*. La práctica social no se filma, se infiere, pues como constructo teórico sirve para explicar la construcción del conocimiento basado en prácticas; se trata, en consecuencia, de un constructo desde una perspectiva pragmática del significado. La existencia de prácticas diversas, aunque semejantes entre sí, en pueblos y culturas, épocas y regiones, escenarios y circunstancias, exige de una explicación sustentada en las acciones de los sujetos (individual, colectivo, histórico) y en las actividades humanas mediadas por la cultura.

Un buen ejemplo de lo que quiero decir lo constituye el "juego". Se tiene la certeza de que jugar es una actividad característica del niño, aunque lo es también, en un sentido más amplio, de todos los seres humanos. Lo que resulta sorprendente de esta afirmación no es el hecho en sí de que el juego esté presente en todas las culturas, sino que los tipos de juego llevados a cabo en distintas culturas tengan estructuras tan semejantes entre ellos: hay juegos de competencia, de estrategia, de fuerza o velocidad, de participación cooperativa… y así un largo etcétera; juegos que son practicados por igual en la India o en Guatemala, tanto en la Edad Media como en años recientes. Se practican en parques, plazas públicas, llanos, calles, casas… por infantes que, por supuesto, no conocieron a "los otros niños" de China o de la Edad Media que practicaron juegos semejantes. ¿Cómo pudieron compartir sus reglas si están tan distantes en el tiempo o el espacio? Si bien estos juegos tienen denominaciones diferentes de una región a otra y se practican bajo pequeñas variantes, poseen siempre la característica común de ser juegos estructurados. La norma que estructura al juego, caracteriza al género o tipo de juego y estructura a su vez las prácticas del jugador. Es decir, el juego está estructurado y es estructurante. La pregunta teórica fundamental que nos plantea la socioepistemología, no referida al juego, es la siguiente: ¿qué produce la norma en la construcción social del conocimiento matemático?

Si bien en el terreno de las ciencias sociales la idea de práctica normada ha sido aceptada por diversos enfoques teóricos y se suele utilizar para explicar asuntos diversos, no ocurre así en el campo de las ciencias exactas; en las matemáticas, como ciencia formal, menos aún. Es usual que, en tanto campo especializado del saber humano, se asuma en la comunidad de matemáticos que la creatividad que caracteriza a la inventiva y al aprendizaje sean de carácter individual, atribuibles a las capacidades del inventor o del aprendiz; son, por tanto, explicables sobre la base de estructuras mentales del talento o del llamado libre albedrío de quien ejerce la acción. Es usual, por ejemplo, escuchar que Gauss abrió un campo, Euler consolidó una rama, Newton extendió una teoría, de modo que son los individuos dotados de talento extraordinario quienes logran dichas metas. La pregunta central en este ámbito de ideas es si podríamos construir una explicación alternativa a la invención individual; una explicación centrada en los procesos de construcción social del conocimiento matemático, pues de ser esto posible, tendríamos con ello un camino para democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre la población. Es decir, si logramos entender a las matemáticas, así como al juego, como parte de la cultura, aceptaríamos también que se guían por normativas específicas. En tal caso, tendremos que mostrar, empíricamente, que los distintos ejemplos desarrollados bajo el programa socioepistemológico pueden ser explicados con base en la existencia de prácticas anidadas, normadas por una práctica social. Más específicamente debemos mostrar la existencia de mecanismos específicos de la práctica social que explican por qué hacemos lo que hacemos; norman y estructuran al aprendiz.

Estos son nuestros nuevos retos: consolidar la socioepistemológica mediante diseños para la intervención didáctica con impacto en los sistemas educativos, así como alcanzar un mayor rigor teórico y, en consecuencia, su estabilización entre el resto de los enfoques teóricos del campo. Esta fue la intención que unió dos proyectos: la educación alternativa en Oaxaca y la mirada socioepistemológica. Una más detallada visión de este programa puede consultarse en diversas publicaciones del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* y en artículos de la *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (*Relime*), pero también, y con mayor fuerza, en las aulas de la educación oaxaqueña.

Nota. Queremos agradecer a la ENSFO y a los dos grupos de profesores quienes cursaron la Maestría, antes de que las autoridades educativas decidieran cancelar el programa…

Referencias

Arrieta Vera, Jaime y Leonora Díaz Moreno (2015), "Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48.

Cantoral, Ricardo (1987), "Historia del cálculo y su enseñanza: el concepto de límite a través de los textos y de su historia", en Fernando Hitt, Elisa Bonilla y Olimpia Figueras (eds.), México, *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Mérida, UADY, pp. 231-235.

Cantoral, Ricardo (1990), *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de "el prædiciere" y "lo analítico"*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", *Epsilon 42,* vol. 14, núm. 3, pp. 353-369.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (2003), "Mathematics Education: A vision of its evolution", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 53, núm. 3, pp. 255-270.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (2004), "La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núms. 2 y 3, pp. 137-168.

Cantoral, Ricardo, Gisela Montiel y Daniela Reyes-Gasperini (2015), "El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 5-17.

Carrillo, Carolina (2006), *¿Saber sin sentir? Una introducción al dominio afectivo*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Covián, Olda (2005), *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya,* Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cordero, Francisco (1994), *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del discurso matemático escolar*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Espinoza, Lianggi (2014), *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Farfán, Rosa María (1993), *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Farfán, Rosa María (2012), *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*, Barcelona, Gedisa.

Ímaz, Carlos (1987), "¿Qué es la matemática educativa?", en Fernando Hitt, Elisa Bonilla y Olimpia Figueras (eds.), *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Mérida, UADY, pp. 267-272.

Reséndiz, Evelia (2004), *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela (2013), *La transversalidad de la proporcionalidad*, México, Secretaría de Educación Pública.

Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para el cambio y la mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Yojcóm, Domingo (2013), *La epistemología de la matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Orígenes y complejidades de una propuesta alternativa de formación continua para profesores de matemáticas y su articulación con el nivel de secundarias

Miguel Ángel Vásquez Vicente*

Desde el año 2012 se inició en Oaxaca una propuesta de profesionalización para profesores en servicio en educación secundaria en matemáticas a través de un programa de maestría profesionalizante. Como parte de esa experiencia se documentaron: 1) las complejidades reales que se presentan en el sistema educativo nacional mexicano con relación a la aplicación de las políticas docentes en una escuela normal superior del estado de Oaxaca; y 2) los cambios y adecuaciones a partir de la teoría socioepistemológica para plantear un didáctica renovada, centrada en prácticas, que permita a los profesores fortalecer su propuesta educativa de educación alternativa y la construcción de estructuras académicas que puedan expandirse y evolucionar conforme a sus necesidades.

Palabras clave

Socioepistemología
Política docente
Escuelas normales
Vinculación de educación secundaria
Profesionalización docente

* Profesor de Educación Básica en el nivel de secundarias y asesor externo de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca (ENSFO). Candidato a Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca (UABJO). Línea de investigación: formación de profesores y política educativa. CE: iangelmx05@gmail.com

Introducción

Históricamente, la escuela ha sido considerada como un espacio donde se forman individuos para adaptarse a su entorno social y donde se realiza la trasmisión del conocimiento y de patrones conductuales que son válidos en una determinada sociedad. Si partimos de que la escuela debe transformarse conforme a las necesidades de un país que evoluciona constantemente podremos observar que no se han llevado a cabo los cambios necesarios para que se cumpla con las demandas educativas actuales de una sociedad del conocimiento donde los flujos de información se incrementan de manera vertiginosa en periodos cortos de tiempo; y tampoco se han dado los cambios estructurales que permitan a los docentes mayores oportunidades de profesionalización vinculante con las escuelas de educación secundaria y con las comunidades de aprendizaje de las diferentes áreas del conocimiento.

Y es que, aunque se han realizado modificaciones en la política educativa en el sistema educativo nacional (SEN), existe una crisis que se ha agudizado en la última década y que se refleja en los indicadores validados y en las mediciones realizadas en diferentes ámbitos del modelo educativo (MED). Recientemente el gobierno federal, a través de la Secretaría de Educación Pública (SEP), ha centrado la mirada en el profesor como un actor fundamental para revertir el rezago educativo; como consecuencia, desde 2013 se ha realizado una serie de cambios estructurales, como la modificación de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos (artículos 3º y 73º), y la publicación de leyes secundarias: la Ley general del servicio profesional docente (LGSPD), la Ley general de educación (LGE) y la Ley del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (LINEE); y también se han creado estructuras institucionales nuevas. Durante estos tres años de la puesta en marcha de estas estructuras, y sin contar con un MED, se pretendió impulsar una estrategia para mejorar el servicio profesional docente y su evaluación permanente; en esta etapa privó la evaluación como un mecanismo punitivo y de control administrativo con muchas limitaciones, al cual se plegó un sector de profesores por temor a ser reprimidos de alguna forma (política, administrativa o laboral), pero ciertamente no se puede decir que exista una integración e involucramiento real de los docentes en estos nuevos procesos.

Por sus características geográficas, políticas y económicas el estado de Oaxaca es considerado, a nivel nacional, como una entidad con altos índices de pobreza y de marginación. Por ello, el intento por impulsar allí la reforma educativa (RE) ha generado un descontento social que ha derivado en el surgimiento de movimientos sociales de rechazo, articulados por el Movimiento Democrático de los Trabajadores del Estado de Oaxaca (MDTEO) de la sección 22, el cual históricamente se ha caracterizado por ser la disidencia magisterial del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE). Esta corriente ha buscado, desde su origen, generar condiciones de igualdad y equidad en la educación para la población oaxaqueña. Después de tres décadas de lucha magisterial, en el 2012 se puso en marcha el Plan para la Transformación Educativa de Oaxaca (PTEO) como una contrapropuesta a los planteamientos oficiales.

Es necesario mencionar que la existencia de estas dos visiones educativas de cómo mejorar la educación, y específicamente la política docente (la RE oficial y el PTEO), han generado un conflicto social muy profundo que ha impedido, hasta la fecha de elaboración de este escrito, que alguna de las dos propuestas pueda ser desarrollada en el estado. Por parte del MDTEO existe un rechazo a la RE porque la consideran privatizadora y un atentado contra los derechos laborales de los trabajadores; es por ello que todos los intentos de aplicación por parte del gobierno federal han fracasado. Y si bien se ha tratado de implementar el PTEO por parte del MDTEO, los gobiernos federal y estatal no aceptan su puesta en marcha ya que consideran que no se encuentra dentro del marco constitucional; por consiguiente, los recursos que se otorgan para la implementación de este plan (humanos, financieros y administrativos) son mínimos o nulos, de manera que los alcances son limitados.

Ante esta ola de cambios legales, administrativos y organizativos, hasta este momento no existen acciones concretas de ninguna de las dos propuestas que permitan identificar cuáles serán los esquemas que se aplicarán para la formación y capacitación de los profesores en servicio y su articulación progresiva, así como su vinculación con las necesidades de las escuelas. Actualmente sólo se realizan cursos, talleres y seminarios que no tienen una organización sistemática y no son aceptados por la comunidad de profesores del estado.

En estas condiciones parecería imposible realizar acciones de cambio y mejora para desarrollar procesos ascendentes de profesionalización que permitan empoderar al docente con la finalidad de mejorar su práctica y, con ello, el sistema educativo estatal.

Problemática

En el presente documento se aborda la problemática que conllevó a la reformulación de procesos de desarrollo profesional con profesores que imparten la asignatura de matemáticas en el nivel de secundaria en las modalidades técnica, general y telesecundaria, en un escenario complejo: la transición conflictiva de una RE, en una institución como es la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca (ENSFO) y su vinculación con la escuela secundaria. La pregunta que se intenta responder es ¿cómo reformular un esquema renovado de formación continua para profesores de matemáticas en la ENSFO, y cómo vincularlo con el nivel de secundarias en el estado de Oaxaca?

Encontrar respuesta a esta interrogante, sin quedar solamente a nivel declarativo o de buenas intenciones, conlleva afrontar las complejidades del SEN en sus diferentes dimensiones e involucrarse en el contexto con los diferentes actores y situaciones al interior y exterior de la ENSFO para identificar las necesidades actuales de los docentes en servicio en este campo disciplinario.

Orígenes y complejidades

Las escuelas normales en México tienen un peso importante en el desarrollo profesional docente y se han constituido de diferentes formas en las distintas regiones del país. Los orígenes de la ENSFO se remontan a las movilizaciones encabezadas por parte de la sección 22 del SNTE para exigir un espacio de formación para profesores en servicio que les permitiera continuar preparándose. Esta demanda era parte de una idea general de transformar la educación mediante un proyecto alternativo en la cual cumplía un papel fundamental el fortalecimiento de la formación académica de los profesores y la generación de cuadros políticos que fueran capaces de incidir en la construcción de una educación democrática y popular. Después de varios años de lucha, en 1989 se logró la apertura de la ENSFO como un nuevo espacio de formación del MDTEO. A partir de ese momento la escuela ofrece licenciaturas orientadas a diversas áreas del conocimiento y campos disciplinarios como pedagogía y psicología educativa; una de ellas es la licenciatura en educación media con especialidades en campos específicos del conocimiento (español, matemáticas, geografía, física, química, biología, historia, formación cívica y ética, telesecundarias e inglés), la cual se imparte en modalidad mixta, es decir que los alumnos estudian todos los sábados y domingos cada 15 días. Las reglas de operación del plan fueron publicadas a través del acuerdo 284 el 21 de septiembre de 2000 (Plan 1999). En la actualidad, la ENSFO es un espacio de formación para profesores en servicio de diferentes niveles (prescolar, primaria y secundaria) que estudiaron la licenciatura en educación secundaria (hasta antes de la RE), para incorporarse, al terminar sus estudios, a una modalidad de secundaria, o bien para poder concursar y ascender al puesto de director.

En la búsqueda de seguir apuntalando nuevos espacios innovadores de formación que atendieran las necesidades de la comunidad estudiantil, en el año 2006, directivos y alumnos comenzaron a desarrollar un proyecto y propuesta curricular para ampliar la oferta de opciones de formación al magisterio oaxaqueño a través de posgrados profesionalizantes para diferentes áreas y campos disciplinarios. El propósito era formar profesionales de alto nivel para la docencia y la investigación que pudieran incidir en un proyecto de educación alternativa. Después de varios años de movilizaciones y negociaciones con funcionarios del IEEPO, en el mes de agosto de 2011 se logró la firma del acuerdo 20108111104 por parte del M. en C. Bernardo Vásquez Colmenares, entonces director general del IEEPO, en el cual se autorizaba a la ENSFO a impartir la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES).

En ese mismo acuerdo quedó establecido que el plan y programa de estudios deberían ser autorizados por la SEP y supervisados y financiados por el IEEPO. Es importante mencionar que si bien la firma del acuerdo es uno de los requisitos que solicita la Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación (DGESPE) para iniciar el proceso de dictaminación de los programas de posgrado, es necesario complementarlo con un expediente administrativo-pedagógico y un proyecto.

Debido a un conflicto administrativo al interior de la ENSFO, resultó muy complicado impulsar un programa con estas características en ese momento, sin embargo, los directivos y estudiantes tomaron la determinación de seguir impulsándolo por considerarlo como una prioridad para la formación de las nuevas generaciones de profesores, y como parte fundamental para la vida académica de la institución.

Durante la investigación documental que se realizó para conformar un expediente con los documentos oficiales emitidos a nivel estatal y federal que respaldaban a la MEMES, se encontró que la documentación estaba desorganizada, fraccionada, y tenía lapsos, incluso de años, en los que no se le había dado continuidad ante la DGESPE. Como resultado de estas primeras búsquedas se consideró que el programa de posgrado tendría que esperar cuando menos dos años para lograr su implementación. No obstante esta situación, gracias al trabajo y la colaboración de diversas estructuras como la ENSFO, el IEEPO, la DGESPE, la Dirección General de Profesiones (DGP) y el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) se logró concluir el proyecto en seis meses; con estos avances, y después de cubrir todos los requerimientos administrativos, el 5 de septiembre del 2012, en la Ciudad de México, se inscribió en la sección primera del libro 060 de instituciones educativas, foja 077, el acuerdo de enmienda al registro de la institución educativa a la ENSFO para la adición de los Estudios de Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria en la modalidad mixta, clave D.G.P. 225561, y se autorizaron las generaciones 2012-2014 y 2014-2016.

Aparentemente la operación de la maestría empezaría sin mayor contratiempo una vez emitida la enmienda al registro por parte de la DGP para dos generaciones, con la firma de un convenio académico con el DME del CINVESTAV, y con el supuesto apoyo del IEEPO; sin embargo, tuvieron que resolverse antes varias problemáticas:

a) Había que crear una plataforma de profesores de asignatura.
b) No existía un mecanismo para otorgar recursos financieros al programa de maestría por parte de la ENSFO y del IEEPO.
c) No se tenían los recursos humanos.
d) No se contaba con una estructura organizativa y operativa de control escolar de la ENSFO, ni con los enlaces específicos del IEEPO para coordinar la operatividad de control escolar y la certificación de la maestría.
e) Rechazo institucional y nula colaboración por parte de los jefes administrativos del personal adscrito a la ENSFO hacia la coordinación de posgrado.

f) Debido a la dinámica académica y de organización política estudiantil, existía poca credibilidad y resistencia para que los funcionarios del IEEPO apoyaran un proceso de profesionalización de alto nivel.
g) Había que realizar cambios y adecuaciones sustanciales del proyecto original del programa de maestría cuya referencia era el plan 1999.
h) Conflictos internos entre el personal adscrito a este centro de trabajo y las estructuras estudiantiles.
i) Un movimiento magisterial, por parte de la sección 22, en rechazo a la política educativa federal.
j) Existía un desconocimiento generalizado por parte de los diferentes actores al interior de la ENSFO y del IEEPO de lo que implicaba la implementación de una MEMES pública y gratuita.

Con todas estas situaciones adversas, todo parecía indicar que esta nueva opción de desarrollo profesional no lograría estabilizarse y sostenerse, y que aun cuando iniciara con altas expectativas por parte de la comunidad estudiantil, gradualmente se iría diluyendo hasta quedar solamente como un intento más para lograr cambios en los profesores que imparten la asignatura de matemáticas.

A pesar de todo, se llevó a cabo un conjunto de acciones estratégicas en diferentes ámbitos con la finalidad de enfrentar cada uno de los problemas señalados y todos se fueron resolviendo no obstante su alto grado de complejidad; también se fueron sistematizando diversos procesos administrativos, financieros, logísticos y de vinculación. Sin embargo, resolver el aspecto medular, que era la parte académica y la instauración de una nueva plataforma de desarrollo profesional docente, implicaba, por un lado, romper con la inercia de caer en el discurso oficial inmediatista sin ninguna proyección hacia el futuro, y por el otro, lograr transparentar y recuperar la credibilidad y rigurosidad académica de la institución.

Para darle sentido a este este nuevo espacio de profesionalización se desarrollaron dos ideas fundamentales: la primera fue cómo darle un sentido de identidad a una comunidad de profesores incipiente a partir de sus realidades diversas y generar una interpretación y una intervención a partir de teorías de este campo disciplinario; y la segunda estuvo orientada hacia los alcances y la forma de conformar, a mediano y largo plazos, estructuras académicas que fueran expandiéndose y evolucionando conforme a las necesidades de los profesores de matemáticas.

En el caso de la primera idea se tuvo que tomar como referencia los planes y programas de licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas. Este plan está basado en competencias, se encuentra estructurado en tres campos de formación (general, común y específica) y sus contenidos tienen como referencia el plan 1993 de educación secundaria (SEP, 1999). Este plan es a todas luces obsoleto, ya que se basa en los avances de la didáctica de los años noventa y muestra una tendencia a utilizar teorías generalistas para diseñar propuestas de intervención. Esto se refleja en los documentos recepcionales de los alumnos, en los cuales un punto medular son las jornadas de observación y práctica docente; éstas se realizan con la idea de que el estudiante logre sistematizar procesos que se dan en las aulas, en los alumnos, en el profesor, y en el saber, así como las relaciones entre ellos (triángulo didáctico) y con los diversos elementos adquiridos en su formación en diferentes semestres para después articular la teoría (integración de los tres campos de formación) con la práctica. Sin embargo, al no lograr identificar y analizar los fenómenos didácticos a partir de la problematización de la matemática escolar, el profesor estudiante se queda en un nivel descriptivo del contexto y de experiencias empíricas sin fundamento en la teoría; esto es, los egresados desconocen cómo sistematizar sus experiencias para lograr la intervención en el aula, y por lo tanto no son capaces de adoptar este proceso para su práctica docente cotidiana.

En el campo de las matemáticas, el plan se basa en los temarios de cinco áreas (aritmética, álgebra, geometría, nociones de probabilidad, y presentación y tratamiento de la información); se proponen problemas tradicionales y se plantean preguntas que pretenden orientar el debate y la reflexión, sin embargo, es muy difícil propiciar reflexiones que trasciendan la visión de la matemática como un objeto de conocimiento acabado y completamente algorítmico, a partir de planteamientos despersonalizados y descontextualizados.

Otro aspecto fundamental que se analiza es la idea de educación alternativa que se fue desarrollando en los profesores debido a la posición que mantiene la sección 22 en contra de la política educativa. Aunque la idea de comenzar la transformación de la educación inició a finales de los ochenta y principios de los noventa, fue hasta hace nueve años que se rechazaron los programas y estrategias federales, entre ellos la Alianza por la Calidad Educativa (ACE); es por esa razón que los talleres generales de actualización (TGA) y los trayectos formativos no se pusieron en marcha en Oaxaca. En cambio, desde el año 2007 la sección 22 comenzó con los talleres estatales de educación alternativa (TEEA), no solamente con la finalidad de capacitar y formar profesionalmente al docente, sino también para cumplir con el objetivo de concientizar a los trabajadores de la educación e iniciar con un proyecto alternativo acorde a los intereses y necesidades de las comunidades.

En el curso de este proceso se realizaron foros y congresos educativos en donde se aportaron elementos para la construcción de una propuesta, misma que se logró concretar el 7 de febrero del 2012 con el PTEO, por parte de la sección 22, en coordinación con el IEEPO. Su estructura medular estaba basada en tres programas y dos sistemas; y parte de una idea que está explícita en su objetivo general:

> Transformar la educación pública en el estado de Oaxaca mediante la formación crítica de los involucrados, la comprensión y la modificación de su entorno recuperando los conocimientos, los saberes pedagógicos y comunitarios, a través de la construcción colectiva de programas y proyectos para lograr una educación integral de los niños, jóvenes y adultos (PTEO, 2012: 12).

A partir de un diagnóstico inicial se determinó que la implementación de estos programas y sistemas deberían partir de una dualidad colectivo-proyecto que permitiera transformar la escuela y donde dichos proyectos emergerían de los planteamientos y necesidades que las escuelas de educación básica tienen, a partir de sus contextos específicos; el colectivo es la unidad básica y se considera así porque permite realizar las adecuaciones operativas con base en las condiciones geográficas, económicas, culturales y sociales. Se define como "un movimiento solidario que comparte y construye un proceso autónomo de la individualidad a la colectividad, busca una participación activa y crítica ante la sociedad actual" (PTEO, 2012: 18).

Trabajar en colectivo permite recuperar los intereses, conocimientos y saberes de los participantes; la reflexión, la deliberación y la acción son procesos permanentes que propician nuevas formas de entender la construcción del conocimiento y resolver las situaciones problemáticas desde una perspectiva crítica, pedagógica y comunitaria. Desde esta mirada se desmitifica a la verdad absoluta y el conocimiento único, reduccionista y separado de la realidad social (PTEO, 2012).

Aunque en el segundo año de pilotaje el Plan fue suspendido de manera oficial por los cambios derivados de la RE, se sigue operativizando, aunque con muchas limitaciones, en diferentes regiones y zonas escolares. Esta idea de educación alternativa se fue construyendo en las diferentes estructuras educativas y con base en ella se logró echar a andar proyectos en coordinación entre profesores, alumnos, padres de familia, autoridades educativas y autoridades locales; en dichos proyectos se recuperan los saberes comunitarios o se resuelvan situaciones importantes de las comunidades y los profesores de diferentes asignaturas aportan elementos en sus planeaciones bimestrales para darles seguimiento. En el caso de la asignatura de matemáticas, el proyecto está enfocado en diversos objetos matemáticos para, posteriormente, exhibir sus evidencias en encuentros pedagógicos locales o regionales. Sin embargo, dado que las orientaciones teórico metodológicas para la elaboración del proyecto estaban basadas en teorías generalistas (pedagogía crítica, hermenéutica crítica y pedagogía comunitaria), el docente presenta confusiones y malas interpretaciones que provocan que en la práctica no se realicen innovaciones sobre esta asignatura, sino que termine reproduciendo secuencias de los libros de texto oficiales. Es decir, el docente no logra articular la teoría con las evidencias que se obtienen y su práctica queda como una buena experiencia o una anécdota. Al no lograr teorizar con respecto a las realidades de sus escuelas, no se genera la posibilidad de consolidar una transformación en la enseñanza de las matemáticas.

Es necesario explicar que en la escuela secundaria, en sus diferentes modalidades, los objetos matemáticos son organizados en un plan y programa (2011) por ejes, temas y subtemas que son abordados por los docentes a partir de una dosificación de contenidos (condiciones de apropiación del conocimiento). El docente se considera como el principal trasmisor del conocimiento y el alumno es el receptor (involucrarse en una actividad), a partir de cuatro paredes (el aula), donde la mayoría de las ocasiones se proponen problemas descontextualizados y despersonalizados (sacados de los libros de texto) que el profesor termina resolviendo en el pizarrón con la atención e interacción de solamente tres o cuatro estudiantes; los demás solamente fungen como receptores pasivos. Si bien se pretende que, conforme los alumnos avancen de nivel a nivel, puedan ser capaces de transferir sus conocimientos a otros escenarios, esto no sucede; debido a esto la asignatura de matemáticas representa para ellos una exigencia de la escuela que se debe cumplir sólo con fines de acreditación, y no como algo útil para el desarrollo del pensamiento matemático y para la vida cotidiana. Con el paso de los años en el sistema educativo nacional, la matemática escolar va adquiriendo un sentido de exclusión social porque en muchos casos se constituye en un obstáculo que impide el ascenso de los estudiantes en su trayectoria profesional y propicia incluso la reprobación y el abandono escolar. Las trayectorias escolares truncas limitan las opciones para el ingreso a un mercado laboral claramente exigente y cambiante.

En los dos esquemas de desarrollo profesional que se han esbozado se ve reflejada la tradición formalista, con su habitual foco en el problema del conocimiento desde el punto de vista de los fundamentos o de la estructura lógico formal, y la constructivista, que si bien relativiza el asunto de la lógica de la demostración y se coloca al nivel de las heurísticas o lógicas del descubrimiento, no abandona su predilección por tomar al conocimiento matemático como centro de sus metáforas teóricas (Cantoral, 2013: 38).

Se hacía necesario, por lo tanto, buscar alternativas en propuestas de formación que permitieran desarrollar en los profesores de matemáticas ideas que fueran más allá de solamente tipificar problemas de aprendizaje sobre diversos objetos matemáticos; lo que se pretendía era que el profesor lograra recuperar saberes a partir de un contexto para describir diferentes procesos y costumbres, es decir, que contara con elementos formativos para transformar e intervenir en escenarios situados. Un aspecto que se retomó fue que si bien a partir de los colectivos del PTEO y la construcción de proyectos los profesores incorporaban aspectos adicionales a los tradicionales (cultura, contexto y saberes comunitarios), carecían de elementos para problematizar el saber y con ello quedaban imposibilitados para realizar rediseños de situaciones didácticas. Era necesario, por lo tanto, diseñar un esquema de formación basado en una teoría de corte sociocultural que modelara los aspectos mencionados, pero que además lograra llegar al nivel de la intervención didáctica en sus diferentes escuelas. Es por esta razón que se planteó un cambio que tendría que pasar por mirar a la ME no solamente como una construcción individual, sino como una construcción social. Esto implicó involucrar elementos como los contextos históricos, institucionales y culturales donde se encuentra inmersa la matemática, y para ello se retomó la definición sobre ME como

> …una disciplina científica que estudia fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Lo didáctico en este enfoque no habrá de restringirse al

ámbito escolar, pues se utiliza en un sentido extendido: como una acción de construcción de significados compartidos, como acto de enseñanza (Cantoral, 2013: 137).

Esta definición rompe con la mirada clásica de la ME según la cual todo se centra en el triángulo didáctico, es decir, en las relaciones profesor-alumno-aula, donde predomina una dialéctica herramienta-objeto y todo se queda dentro del aula, sin la posibilidad de darle significancia a los temas escolares. Es así que el programa de la MEMES se orientó, a partir de la teoría socioepistemológica, hacia un cambio de foco: de los objetos hacia prácticas de referencia que existen en diferentes escenarios situados del estado de Oaxaca, esto es, se abandonó el análisis de los conceptos matemáticos *per se* para analizarlos conjuntamente con las prácticas que acompañan su producción y que hacen posible su trascendencia de una generación a otra (Cantoral, 2013); es decir, dichos conceptos se estructuraron a partir de una idea de anidación de prácticas con una articulación de acciones, actividades y prácticas que desarrolla cotidianamente la población, desde el trueque o la gastronomía (saber popular), las conjeturas que un mecánico tiene que realizar para encontrar y resolver la falla de un automóvil (saber técnico), o bien el saber científico, que es regulado por la práctica social. Se asume al saber como construcción social del conocimiento; en este sentido, el saber o los saberes son procesos deliberados para el uso compartido del conocimiento. Se trata de mecanismos constructivos, altamente sofisticados, de naturaleza social, que se caracterizan por producir interacciones, explícitas o implícitas, entre mente, conocimiento y cultura (Cantoral, 2013: 53).

Política docente

En el documento "Antecedentes y criterios para la elaboración de políticas docentes en América Latina y el Caribe (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Guatemala, México, Perú y Trinidad y Tobago)" se menciona que el análisis de los modelos curriculares y pedagógicos de la formación continua permite concluir que éstos presentan una baja especialización y problemas crónicos de relevancia respecto a los requerimientos de las instituciones escolares, y que predominan los acentos teóricos y las visiones generales (UNESCO, 2013). A partir de la caracterización que se propone en este documento para la formación continua se retoman los siguientes:

- La evidencia disponible apunta a que los maestros son clave para el buen desempeño de alumnos, escuelas y sistemas (PISA, 2009; OCDE, 2009a; Mourshed, Chijioke y Barber, 2010) y sugiere que los programas de desarrollo profesional a lo largo de sus trayectorias son la vía para que adquieran las competencias propias de una buena práctica que se renueva y se ajusta a los contextos particulares. Ello supone cambios en la formación continua orientados hacia una transformación real de las prácticas de enseñanza (UNESCO, 2013: 57).

- Algunos de los esfuerzos emprendidos asumen que el propósito de la formación continua es incrementar la calidad de la educación en el aula, por lo que se desplaza la perspectiva de lo remedial a favor de una visión que privilegia el impulso de "…aquellas actividades consientes y planificadas dirigidas intencionalmente al beneficio de individuos, grupos o escuelas…" (Day C., cit. por Bolam y McMahon, 2004: 34, en OREALC/UNESCO: 2013: 59).
- [Dentro de la formación continua, los posgrados] son una gran oportunidad para desarrollar procesos formativos de mayor duración e impacto y, por otra parte, los programas desarrollados en los contextos escolares seguramente serán de mayor calidad si se promueve activamente la participación de los maestros con mayores niveles académicos y amplia experiencia en su diseño y operación. Este recurso es de gran importancia para desarrollar programas de aprendizaje colaborativo de alta calidad situados en comunidades de aprendizaje que estos profesionales pueden liderar (OREALC/UNESCO, 2013: 69).
- Aun en el caso de los programas evaluados en el marco de los mecanismos de aseguramiento de la calidad, el juicio se emite en función de los criterios e indicadores propios de la investigación, lo que limita el desarrollo de opciones con distintas orientaciones, como programas de carácter profesionalizante (OREALC/UNESCO, 2013: 74).

Para la construcción de la propuesta se consideraron los planteamientos de tres documentos oficiales del SEN sobre aspectos relacionados a la formación y capacitación continua de docentes en servicio: el Plan Estatal de Desarrollo 2011-2016 (PED), el Plan Nacional de Desarrollo 2013-2018 (PND), y el Plan Sectorial de Educación (PSE) 2013-2018 (SEP, 2013b).

En el PED se plantean tres ejes para afrontar las necesidades que en materia educativa requiere el estado de Oaxaca; una de ellas es la capacitación continua de profesores. Se hace énfasis en la necesidad fundamental de constituir un verdadero sistema de formación de maestros que pueda articular a las instituciones formadoras con las necesidades de los distintos niveles y modalidades de la educación básica, que fortalezca las tareas de investigación, genere alternativas y propuestas educativas acordes a la realidad socioeconómica y cultural del estado de Oaxaca, y responda a los retos del cambio al que aspira la ciudadanía en esta nueva etapa del estado.

A continuación se detallan las líneas específicas que se proponen en el PED sobre la formación docente para profesores en servicio y la mejora del fortalecimiento de las normales.

En el punto 6.2.7.1 referente a educación básica y normal, el objetivo número uno establece: "Incrementar la calidad educativa de la educación básica en el estado de Oaxaca, a través de la igualdad de oportunidades educativas, la capacitación continua de profesores y el desarrollo y mantenimiento de infraestructura para la educación básica". Y, de manera específica, para la formación de profesores se propone la estrategia 1.4 que dice de manera textual: "Fortalecimiento del sistema de formación y capacitación continua de los profesores del nivel básico, para contribuir a mejorar la calidad educativa del estado de Oaxaca" (PED: 2011: 256).

Para poder concretizar de forma operativa estas estrategias se establecen tres líneas de acción para avanzar en la consecución de los objetivos (PED, 2011: 257):

- Currículos de las escuelas normales revisados, actualizados y evaluados constantemente para que estén acordes con las necesidades específicas y el contexto de diversidad cultural de Oaxaca.
- Especializaciones en la enseñanza de matemáticas, español, ciencias y educación indígena creadas en las escuelas normales del estado.
- Programa de especialización y actualización permanente de los docentes implementado, para fortalecer sus conocimientos, además de las técnicas y métodos didácticos de la enseñanza y aprendizaje en matemáticas, español, ciencias y educación indígena.

Referente al PND, este plan tiene tres ejes de acción para desarrollar el potencial humano de los mexicanos con educación de calidad, sin embargo, en ninguno se menciona de manera directa algo referente al desarrollo profesional docente. Lo más parecido se encuentra en el primer eje, donde se menciona que se busca que los alumnos sean educados por los mejores maestros. Posteriormente, se estructura con base en objetivos (describen los motivos fundamentales de la acción del gobierno, aún sin especificar los mecanismos particulares para alcanzarlos), estrategias (se refieren a un conjunto de acciones para lograr un determinado objetivo) y líneas de acción (es la expresión más concreta de cómo el gobierno de la república se propone alcanzar las metas).

En el eje VI.3.1, México con Educación de Calidad, se menciona, en el objetivo 3.1: "Desarrollar el potencial humano de los mexicanos con educación de calidad". Y de éste se deriva la estrategia 3.1.1: "Establecer un sistema de profesionalización docente que promueva la formación, selección, actualización y evaluación del personal docente y apoyo técnico-pedagógico", que impacta directamente a las siguientes acciones:

- Estimular el desarrollo profesional de los maestros, centrado en la escuela y en el aprendizaje de los alumnos, en el marco del servicio profesional docente; impulsar la capacitación permanente de los docentes para mejorar la compresión de modelo educativo, las prácticas pedagógicas y el manejo de las tecnologías de la información con fines educativos;
- Estimular los programas institucionales de mejoramiento del profesorado, del desempeño docente y de investigación, incluyendo una perspectiva de las implicaciones del cambio demográfico.

En el caso del PSE, lo que respecta a la formación se encuentra en el Objetivo 1: "se plantea asegurar la calidad de los aprendizajes en la educación básica y la formación integral de todos los grupos de la población"; de la que se desprende la estrategia 1.4:

> Fortalecer la formación inicial y el desarrollo profesional docente centrado en la escuela y el alumno. Las líneas de acción en las que se incidirá serán:
>
> 1.4.5 Poner a disposición de las escuelas un conjunto de apoyos para que sus docentes constituyan y desarrollen comunidades de aprendizaje profesional.
>
> 1.4.6 Impulsar las modalidades de formación fuera de la escuela que refuercen el desarrollo profesional docente.
>
> 1.4.7. Alentar la creación y fortalecimiento de redes de escuelas y docentes para su desarrollo profesional.
>
> 1.4.9 Asegurar la calidad en la educación que imparten las normales y la competencia académica de sus egresados.

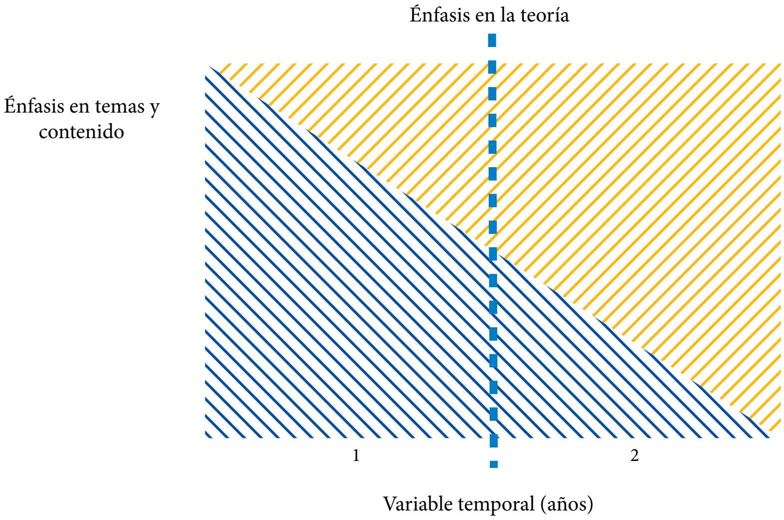
Un agregado a estos documentos son los planteamientos del PTEO a partir de un sistema estatal de formación profesional de los trabajadores de la educación de Oaxaca (SEFPTEO). En esta propuesta de formación profesional se establecen tres saberes fundamentales: primero, el saber pedagógico, en donde se reivindica el sentido de la docencia como una acción dialógica, reflexiva, analítica, ética, filosófica, participativa, problematizadora y sistemática, que articule las acciones del aula, la escuela y la comunidad. Segundo, el saber multidisciplinario, en el que no sólo se requiere tener conocimientos y saberes sobre la materia de trabajo, sino tener referentes de otras disciplinas como la antropología, la sociología, la filosofía, y la ética; ello permitirá comprender e interpretar la cultura comunitaria de los pueblos donde cotidianamente se desarrolla la práctica educativa. Y tercero, un saber investigativo, que se sustenta en la epistemología y en la metodología de la problematización e indagación, y recupera saberes y conocimientos de las acciones educativas y comunitarias, lo que posibilita generar teoría pedagógica (PTEO, 2012: 23).

Propuesta de formación

El programa MEMES partió de la idea de que en el estado de Oaxaca los procesos de profesionalización para profesores en servicio que imparten la asignatura de matemáticas en la escuela secundaria han sido muy irregulares y han tenido un bajo impacto en el sistema educativo. Aunado a ello está la transición generacional de profesores: dado que la ME es una disciplina científica relativamente nueva, fue necesario formar a líderes académicos en esta disciplina. Una crítica que siempre se hace a las opciones de formación en el desarrollo profesional docente es que los programas de posgrado presentan una ruptura con respecto a las necesidades e intereses que tiene el docente, o bien éstos deben dejar de impartir clases para realizar sus estudios. En contraste, el programa MEMES estableció como uno de sus criterios que los profesores inscritos en la maestría deberían seguir adscritos a una escuela y continuar con sus actividades frente a grupo, con la finalidad de que pudieran recuperar las problemáticas propias de su asignatura; por consiguiente, la profesionalización fue orientada a entender la realidad a partir de una teoría de corte sociocultural (la socioepistemología) con la finalidad de lograr rediseños para la intervención en el aula; pero además, al estar en diálogo entre pares con otras modalidades de secundaria de otras regiones y zonas, los docentes reconocen otras problemáticas y se fortalece el debate académico.

Se retomó el hecho de que el profesor en servicio tiene experiencia sobre su práctica y, por lo tanto, cuenta con referentes empíricos que le permiten establecer acciones concretas de corto plazo, pero que le imposibilitan la realización de intervenciones a largo plazo. Del otro lado, los profesores seguramente conocen teorías del aprendizaje generalistas o de su campo disciplinario, pero desligadas de la práctica docente, lo cual les impide realizar acciones específicas sobre su labor diaria. Una combinación de ambos elementos es lo que haría la diferencia en la formación de líderes académicos de ME; es por ello que en la MEMES fue fundamental establecer una adecuada articulación de la teoría con la práctica, de manera que el docente no solamente obtenga elementos de última generación de conocimiento, sino que a partir de la evidencia de otras investigaciones viva la experiencia de cómo llegar a los diseños de situaciones didácticas. La forma de estructurarlo fue a partir de fortalecer los siguientes ejes: 1) teorías del aprendizaje con énfasis en la socioepistemología; 2) campo disciplinario; y 3) aspectos metodológicos. Esto significó iniciar con el campo disciplinario profundizando en la comprensión de nociones matemáticas (proporción, funciones, trigonometría, etcétera), así durante el primer semestre se hizo énfasis en el contenido de matemáticas, pero desde un enfoque centrado en prácticas para darle significado a los objetos matemáticos; además de esto, se orientaba al rediseño de manera implícita, es decir, aunque no se teorizaba

Figura 1. Modelo de formación



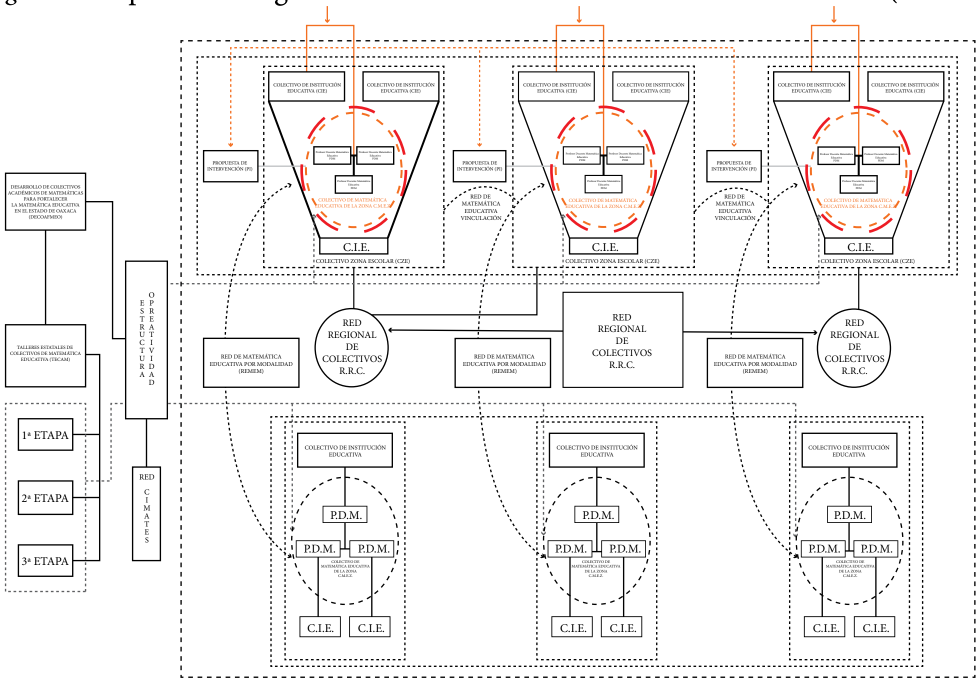
Fuente: Cantoral, 2013.

a profundidad sí se introducían elementos de teoría de forma paulatina que permitieran al docente contrastar, reflexionar y recuperar aspectos de su práctica cotidiana. En el último año (tercer y cuarto semestres) se hizo un mayor hincapié en aspectos teóricos y metodológicos a partir de los proyectos de investigación de los profesores-alumnos, aunque siguen trabajando contenidos de matemáticas. Lo que cambia, por tanto, es el énfasis, pero en ambos momentos existe contenido (saberes) y teoría.

Como puede verse, esta propuesta está pensada para brindar a los docentes las herramientas teóricas, metodológicas y prácticas para que: 1) comprendan e interpreten los fenómenos didácticos; 2) problematicen los saberes matemáticos escolares y su relación con la construcción de significados compartidos con otros espacios de la comunidad (aula extendida) y 3) rediseñen situaciones de aprendizaje a partir de prácticas situadas que permitan el desarrollo del pensamiento matemático en alumnos de secundaria.

La segunda propuesta de profesionalización de los profesores de ME de secundaria se orientó a darle solidez a la maestría mediante una estructura ascendente de crecimiento a partir de una organización local en diferentes zonas y regiones del estado de Oaxaca, y a nivel nacional con instituciones educativas como normales, tecnológicos y universidades de todo el país. Se trató de una propuesta sistémica de formación orientada a profesionalizar a profesores en servicio que serían los futuros responsables de conducir las orientaciones técnico pedagógicas y, por consiguiente, los líderes

Figura 2. Propuesta de organización de Colectivos en Matemática Educativa (CAME)



Fuente: CIE: colectivo general de institución educativa; CMEZ: colectivo de matemática educativa de zona; CZE: colectivo de zona escolar; RRC: red regional colectivos; REC: red estatal de colectivos; PI: propuesta de intervención; PDM: personal docente en matemáticas.

académicos en ME y que se formarían en el programa MEMES, los cuales constituirían un colectivo.

EL colectivo general de institución educativa (CIE) formaría una unidad mínima de organización, en donde el personal docente en matemáticas (PDM) socializara y problematizara aspectos específicos de la matemática escolar; la organización de todos los CIE en una zona escolar conformaría un colectivo de zona escolar (CZE); el agrupamiento por regiones daría como consecuencia una red regional colectivos (RRC) y por último todas las regiones del estado darían como resultado una red estatal de colectivos (REC).

Sin embargo, se esperaba que durante el proceso de inicio los profesores de matemáticas fueran pasivos en cuanto a la vinculación con el colectivo general de institución educativa y con los colectivos de matemática educativa de zona, ya que estarían enfocados principalmente en observar las necesidades de los colectivos, profesionalizarse y elaborar rediseños de intervención afines a sus contextos. Después de que los profesores concluyeran sus estudios de posgrado se iniciaría con la fase de operativizar los colectivos académicos de matemática educativa, de manera que los profesores formados en la MEMES tuvieran una posición totalmente activa ante el funcionamiento de la REME para la elaboración de un taller estatal de colectivos de matemática educativa (TECAM), cuya base serían las producciones académicas realizadas en la MEMES; y los talleres, a su vez, servirían para establecer vínculos con otros docentes que estuvieran interesados en continuar con su desarrollo profesional en trayectos formativos encadenados y con una estructura secuencial que permitiera el monitoreo. En resumen, los "proyectos académicos" (PA) constituirían la directriz de los colectivos hacia la intervención, y tendrían dos vertientes:

- Rediseñar y generar propuestas innovadoras para la intervención partiendo de los contenidos curriculares que se plantean en los planes y programas oficiales (problematización de la matemática escolar).
- Generar o dar seguimiento a dichas propuestas a partir de las necesidades de las comunidades.

Por último, era necesario que todo lo que se genere en el proceso se socializara en redes de colaboración nacionales, como la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE).

Para la puesta en marcha del programa de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) se realizaron procesos rigurosos de selección (entrevistas, examen y curso propedéutico); 28 estudiantes conformaron la primera generación (2012-2014) de la maestría, 12 de los cuales son profesores que laboran en secundarias técnicas (43 por ciento), 10 en telesecundarias (36 por ciento) y 6 en secundarias generales (21 por ciento).

En agosto de 2014 egresaron 25 estudiantes de la generación (2012-2014): 11 de secundarias técnicas (44 por ciento), 4 de secundarias generales (16 por ciento) y 10 de telesecundarias (40 por ciento). Tres alumnos desertaron (11 por ciento).

En la segunda generación (2014-2016), que inició en septiembre de 2014, después de acreditar el examen y el curso propedéutico fueron aceptados 23 estudiantes: 12 de secundarias técnicas (52 por ciento), 6 de secundarias generales (26 por ciento) y 5 de telesecundarias (22 por ciento). Un estudiante se dio de baja al término del segundo semestre.

Los datos se resumen en el cuadro que sigue:

Generación	Secundarias técnicas	Secundarias generales	Telesecundarias
Primera (2012-2014)	11	4	10
Segunda (2014-2016)	11	6	5
Totales por modalidad	22	10	15
Total			47

Conclusiones

Después de casi cuatro años en los cuales el gobierno federal ha intentado implementar una reforma educativa, la mayoría de sus estrategias y acciones han sido orientadas hacia procesos administrativos y de evaluación; no se ha planteado un cambio importante en lo que se refiere a política docente, y específicamente respecto de la formación continua para profesores. Se mantiene el esquema de ofrecer cursos bajo la idea de que a mayor capacitación habrá mejores profesores, sin embargo, está demostrado que ese viejo modelo adolece de severas debilidades: no existe un planteamiento a mediano y largo plazo, por lo que los cursos o diplomados están desligados de las necesidades reales de los profesores y, por lo tanto, no fortalecen su práctica docente; además, dicho modelo provoca problemas por la mercantilización de los cursos. Frente a esto, lo que se requiere son trayectos de formación de largo alcance a partir de los intereses y necesidades de los profesores, con referencia a sus contextos específicos. En este sentido sostenemos que se debe recuperar el papel de la normales como un eje conductor que permita instaurar diversas modalidades de formación: seminarios, cursos, diplomados y posgrados, ya que hasta este momento, si bien en foros y en documentos se habla del papel fundamental de las normales para la formación de profesores, en la formación continua no existe un planteamiento sobre el papel que jugarán las normales superiores en la reforma.

En este documento se explicaron los orígenes de un programa de maestría profesionalizante a partir de la ENSFO y sus complejidades en diferentes dimensiones: administrativa, académica, financiera, política, laboral e institucional; se mostró también que, en el marco de la reforma educativa, la política docente normalmente describe estos fenómenos, pero difícilmente elabora estrategias y acciones para implementar procesos de mejora.

A tres años de la implementación de la MEMES se consiguió dar un cambio en los procesos de profesionalización; este cambio fue posible gracias al fortalecimiento de un programa dinámico mediante una idea renovada de la didáctica de las matemáticas; esta idea está centrada en prácticas y se orienta a la generación de diseños de situaciones de aprendizaje que favorezcan la construcción del pensamiento matemático de los adolescentes. Además, se constituyó un colectivo de matemática educativa (CAME) que problematiza el saber a partir de las necesidades de sus contextos y que se involucra en diversos procesos del sistema educativo estatal.

Aun y cuando las condiciones no han sido favorables se lograron algunos resultados significativos, como la elaboración de producciones académicas de los egresados y la participación en diversos foros donde se establecen diálogos entre pares. Esta experiencia hace patente que, aun en ambientes tan complejos como el del sistema educativo en Oaxaca, se puede lograr una transformación si existen procesos genuinos de diálogo con los docentes y apertura para promover, respaldar y darle continuidad a proyectos de largo plazo.

Referencias

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.

Gobierno de México (2013), *Plan Nacional de Desarrollo 2013-2018*, México, en: http://pnd.gob.mx/wp-content/uploads/2013/05/PND.pdf (consulta: 25 de febrero de 2015).

Gobierno de México-Secretaría de Educación Pública (SEP) (2013a), *Plan de estudios 1999*, México, SEP.

Gobierno de México-Secretaría de Educación Pública (SEP) (2013b), *Programa sectorial de educación 2013-2018*, México, SEP, en: http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/4479/4/images/PROGRAMA_SECTORIAL_DE_EDUCACION_2013_2018_WEB.pdf (consulta: 25 de enero de 2015).

Gobierno de Oaxaca (2011), *Plan Estatal de Desarrollo (PED) 2011-2016*, Oaxaca, en: https://www.finanzasoaxaca.gob.mx/pdf/planes/Plan_Estatal_de_Desarrollo_2011_2016_2.pdf (consulta: 15 de agosto de 2013).

OREALC/UNESCO (2013), *Antecedentes y criterios para la elaboración de políticas docentes en América Latina y el Caribe. Estrategia regional sobre docentes*, Chile, OREALC/UNESCO, en: http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002232/223249S.pdf (consulta: 30 de noviembre de 2015).

"Plan para la Transformación de la Educación de Oaxaca (PTEO)", Oaxaca, IEEPO/SNTE-sección XXII, en: http://pipe.cide.edu/documents/1009900/3851427/Plan%20Transformación%20Educación%20Oaxaca%20PTEO_IEEPO-SNTE%202012.pdf (consulta: 20 de mayo de 2013).

Oaxaca: una transformación colectiva con impacto social y educativo

Daniela Reyes-Gasperini*

El objetivo de este artículo es mostrar cómo, a pesar de las situaciones adversas, existe una actitud para la transformación por parte del profesorado oaxaqueño. Caracterizamos el dispositivo de intervención de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria en Oaxaca, cuyo rasgo distintivo principal es que potencia las fortalezas de las y los colegas docentes, sobre la base de la problematización de la matemática escolar. Con base en el ejemplo del seminario sobre *lo proporcional*, se evidencian las interacciones para con la matemática escolar y las propuestas de intervención en sus aulas. El crecimiento profesional docente autónomo como parte de la práctica y el desarrollo profesional promueve en el profesor autonomía y lo ubica en un rol activo.

Palabras clave

Empoderamiento docente

Desarrollo profesional docente

Problematización de la matemática escolar

Socioepistemología

Matemática educativa

* Coordinadora académica del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas - PIDPDM (México). Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Línea de investigación: socioepistemología y empoderamiento docente. Publicaciones recientes: (2016), "Funcionalidad de los algoritmos en el desarrollo del pensamiento matemático", *Novedades Educativas*, núm. 305, pp. 18-24; (en coautoría con R. Cantoral, en prensa), "Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber matemático en una transformación educativa?", *Revista de Ciencias de la Educación*. CE: dreyes@cinvestav.mx

Introducción[1]

El creciente interés por el estudio del desarrollo profesional docente en el campo de las matemáticas, en específico en la región de Latinoamérica (Cabrera, 2014; Lezama y Mariscal, 2008; Montiel, 2009; Pochulu y Rodríguez, 2012; Soto, 2015, entre otros) configura el contexto que sustenta este artículo. Todas las propuestas persiguen un objetivo claro: la mejora en la acción de educar matemáticamente, de diferentes maneras y en diferentes regiones.

La articulación entre lo que piensan y lo que hacen en las aulas los profesores como caracterización de las creencias docentes, según Pajares (1992), permite posicionarnos y distinguirnos: por nuestra parte, *no* nos propusimos modificar creencias, sino que nos planteamos un objetivo de intervención práctica donde los profesores vivieran una nueva relación con el conocimiento matemático y una nueva manera de significarlo (dotar de significado al objeto), que les permitiera, a partir de la *reflexión*, consolidar en la *acción* las innovaciones que quisieran construir. Propusimos, explícitamente, nuevas maneras de *hacer*, y no de *creer*. Si este hecho modifica sus creencias o no, dependerá de cada uno de los profesores y por tanto no fue nuestro objeto de estudio. Esto surge en virtud de que, como señalan Lezama y Mariscal (2008), debemos preguntarnos sobre cómo generar confianza y autonomía que les permita, desde su propia iniciativa, arriesgarse a la innovación y que sea parte de su identidad profesional y contribuya, en palabras de Llinares (2013), a "mirar profesionalmente". Todo esto, tal como lo plantea Montiel (2009), refiere a preguntarse sobre la transformación de la práctica docente que se llevaría a cabo mediante la resignificación de la matemática escolar. Entonces, a partir de la reflexión que realiza Pozo (2012) sobre la necesidad de trabajar con la gestión y la relación con el conocimiento matemático (tema que Ponte *et al.,* 2013, estudian desde el análisis de la conducción de discusiones colectivas en la clase de matemática) proponemos y estudiamos, por nuestra parte, una alternativa para atender al planteamiento establecido como un proceso precedente a la actividad áulica: el crecimiento profesional docente autónomo como parte de la práctica profesional.

En particular, al hablar de desarrollo profesional docente nos referiremos a la postura de Ponte (1998), a saber: plantear actividades como proyectos, cambios de experiencias, lecturas, reflexiones; considerar un movimiento de "dentro hacia fuera", es decir, tomar en cuenta lo que los profesores quieren hacer y llevar a la práctica, poniendo atención a sus potencialidades, más allá del señalamiento de sus falencias; incorporar los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales del profesor; consolidar la consideración de la teoría y la práctica de manera íntegra. A partir de ello se desea lograr, entre otras, la elaboración de un producto final que represente una intervención teóricamente fundamentada, en la práctica.

1 La autora desea agradecer a la cultura del estado de Oaxaca, a Ley, a Miguel, a Benja y a todas y todos los colegas estudiantes de la MEMES. Oaxaca es una región que sabe lo que quiere y, desde hace muchos años, se ha propuesto realizar una transformación colectiva para un impacto social. En el 2012, coincidimos y empezamos a avanzar juntos.

Así, apoyándonos en los estudios de Montiel (2009) y Lezama y Mariscal (2008), teorizamos y proponemos a la problematización de la matemática escolar (PME) como un recurso que abre una nueva postura frente al fenómeno del desarrollo profesional docente: cuestionaremos, propondremos acciones, evidenciaremos transformación de la práctica bajo la concepción de que es la PME nuestro cimiento de partida. En síntesis, si pretendemos mejorar la educación matemática, suponemos indispensable considerar al saber matemático y, en particular, su problematización, para hacer una inmersión y una propuesta de acción sobre el desarrollo profesional docente. Nuestra propuesta apuntó a lo que hoy podemos enunciar teóricamente como el cambio de relación con el conocimiento matemático escolar (Reyes-Gasperini, 2016).

En este artículo se explicará cómo se confeccionó el dispositivo de intervención, los sustentos teóricos y sus propósitos, a partir de un ejemplo del desarrollo del pensamiento proporcional, para cerrar con la evidencia de los logros obtenidos con las y los entusiastas profesores oaxaqueños de nivel secundario que conformaron la primera y la segunda generación del programa de Maestría en la Enseñanza de la Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) del Instituto Estatal de Educación Pública de Oaxaca. Dicha maestría se imparte desde la Coordinación General de Educación Básica y Normal, Departamento de Formación y Actualización de Docentes de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca.

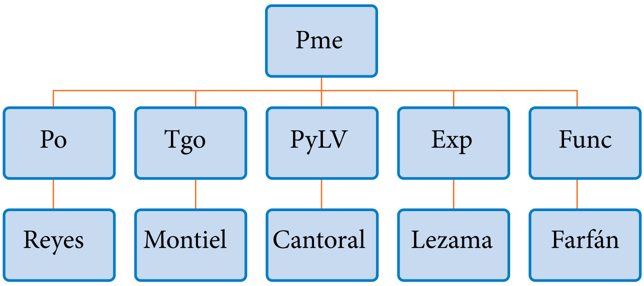
La propuesta de innovación

El contexto sobre el cual se trabajó esta propuesta (detallado en el artículo de Javier Lezama de este mismo número especial), precisaba de la consideración del contexto de los estudiantes, a través de sus profesores. Las y los profesores oaxaqueños trabajarían de manera que, al concluir, pudieran realizar situaciones de aprendizaje contextualizadas con base en quienes aprenden. Para ello, se buscarían prácticas socialmente compartidas, entendidas como acciones intencionadas, normadas culturalmente, en las distintas regiones del estado de Oaxaca.

Entonces, ¿cómo se organizó esta estrategia de intervención? Se trabajó con el desarrollo de los siguientes estilos de pensamiento matemático: pensamiento proporcional, pensamiento trigonométrico, pensamiento y lenguaje variacional, pensamiento exponencial y pensamiento funcional propio del precálculo. En cada uno de ellos se problematizó la matemática escolar; este proceso se consideró como un recurso para confrontar y desafiar la matemática escolar en los sistemas educativos, en contextos de significancia diferentes.

Para promover la problematización de la matemática escolar de los pensamientos mencionados, cada uno de los responsables de los seminarios realizó una problematización del saber matemático, es decir, un estudio a profundidad que permitió hacer del saber un problema a través de las cuatro dimensiones del saber que estudia la teoría socioepistemológica (Cantoral, 2013): social, epistemológica, cognitiva y didáctica, localizando y

Figura 1. Seminarios de desarrollo del pensamiento matemático de la MEMES



Fuente: elaboración propia.

analizando su uso y su razón de ser, es decir, el estudio de la naturaleza del saber de manera sistémica.

La PME propicia un *c*ambio de relación con el conocimiento matemático escolar (Reyes-Gasperini, 2016; Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014; Reyes-Gasperini y Cantoral, en prensa; Reyes-Gasperini *et al.*, 2014), donde la nueva relación, sustentada en prácticas, genera una nueva dinámica para los profesores, ya sea en su gestión áulica —tareas encaminadas mediante situaciones de aprendizaje con contexto de significancia y situacional específicos—, en los aspectos actitudinales y psicológicos —generación de confianza, motivación e iniciativa de innovación— (Lee y Nie, 2014), así como en su práctica profesional —incorporación a una comunidad específica que le permite ser parte de un colectivo transformador, con base en un modelo radical del empoderamiento, que se sustenta en las teorías de transformación social cuyo objetivo fundamental es la emancipación individual y colectiva— (Bacqué y Biewener, 2015).

La propuesta: desde el individuo, pasando por lo colectivo, hacia lo social

El dispositivo de intervención precisa de la acción individual, parte del colectivo y pretende un impacto social. En términos de Bacqué y Biewener (2015), se reconocen tres dimensiones o etapas del empoderamiento, a saber:

> **Etapa individual o interior**: designa el proceso que permite a cada individuo desarrollar una "consciencia crítica" y su capacidad de acción. Esta pasa por la construcción de una imagen positiva de sí, por la adquisición de conocimientos y competencias que favorecen una comprensión crítica de su medio ambiente, por el desarrollo de recursos individuales y por la elaboración de estrategias para alcanzar objetivos personales y colectivos;
>
> **Etapa interpersonal, organizacional o colectiva**: designa el desarrollo de la capacidad de "actuar con" y de "actuar sobre";

> **Etapa política o social**: plantea la cuestión de la transformación de la sociedad en su conjunto, a través de la acción colectiva (Bacqué y Biewener, 2015: 41).

El dispositivo propuesto partió de las fortalezas de los interactuantes; de este modo se promovió la idea de una imagen positiva de sí mismos. En el trabajo con profesores la etapa individual se considera indispensable, a la vez que se trata de una decisión personal. Los procesos de desarrollo profesional docente ofrecidos contemplan la aceptación y deseo de permanencia por parte de los participantes. Nótese que las autoras caracterizan a la etapa colectiva como incluyente en la etapa social. La trascendencia de la organización colectiva proviene del impacto social. Este último, en palabras simples, es el objetivo de la propuesta: transformar la acción de educar matemáticamente a través del colectivo docente.

Saber matemático culto, técnico y popular

En diferentes artículos previos empezamos haciendo la siguiente distinción: la teoría socioepistemológica establece una clara diferencia entre tres áreas, Matemática, matemática escolar y matemática educativa. La primera es una rama del campo científico que produce conocimiento matemático con criterios de verdad y la desarrollan comunidades internacionales; la segunda es un derivado de los procesos de transposición didáctica de la primera; la tercera es otro campo disciplinar científico que estudia los fenómenos didácticos ligados al conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

Desde la socioepistemología se concibe, además, que el saber es el conocimiento en uso. Por tanto, examinamos el saber popular, técnico y culto, ya que las culturas, las disciplinas científicas en general y la Matemática, en particular, usan al conocimiento matemático de diferentes maneras. Todas ellas —igualmente importantes— conforman la sabiduría humana. Es importante aclarar la relevancia de hablar de la sabiduría humana como la fusión entre los tres tipos de saberes, ya que, por ejemplo, lo que hoy se concibe como saber culto hace unos años no lo era, o bien, dentro de unos años no lo será. Lo mismo ocurre con el saber técnico o popular. Por tal motivo, la trascendencia de los estudios socioepistemológicos radica en la flexibilidad en la articulación que le da operatividad a la fusión entre el saber sabio, culto y popular. En particular, en el caso oaxaqueño, este hecho fue de suma relevancia dada la fuerza cultural y el cúmulo de conocimientos que tiene la región, y cuya explicitación se vio como una necesidad desde que se comenzó a trabajar con el grupo.

El discurso matemático escolar (dME)

La matemática que vive en el sistema escolar es producto de una transposición didáctica que lleva al saber sabio, al saber enseñado (Chevallard, 1999); es decir, la obra matemática sufre modificaciones adaptativas progresivas con el fin de seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos matemáticos que serán incluidos en las unidades temáticas de la escuela y la universidad (*matemática escolar*). Asimismo, se sabe que los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se articulan a los currículos de matemática de los sistemas educativos, se suelen centrar en el tratamiento de los objetos matemáticos formales más que en la construcción social del conocimiento matemático por parte del estudiante; es decir, se entiende a la matemática escolar como un cúmulo de objetos abstractos o definiciones, anteriores por tanto a la praxis social y, en consecuencia, externas al individuo, en donde el profesor comunica o reproduce de la mejor manera posible lo que el currículo indica, en varias ocasiones carente de significado tanto para el estudiante como para el profesor.

A diferencia de la creencia generalizada de que la matemática escolar, como estructura objetivable del dME, es un ente que no puede alterarse, es evidente que sí es accesible a modificaciones; sin embargo, cualquiera sea su modificación, nunca perderá su estatus normativo y hegemónico. Por este motivo es que se propone una constante revisión y modificación que promueva el aprendizaje basado en el uso de las matemáticas. Una caracterización del dME que para la comunidad de matemáticos educativos es de gran importancia fue la realizada por Soto (2010), ya que sintetizó teóricamente los estudios realizados durante dos décadas respecto a este constructo que usó la teoría para evolucionar en la investigación. En su estudio enuncia lo siguiente: "El dME es caracterizado como un sistema de razón SR, que excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes y docentes) de la construcción del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica VS" (Soto, 2010: 91).

Reinterpretamos de esta caracterización, y en particular, de la investigación completa de la autora, que una vez realizada la síntesis teórica respecto al dME se despersonifica el problema del proceso de enseñanza —donde los responsables eran los docentes— o del proceso de aprendizaje —responsabilizando a los estudiantes— para hablar de un problema focalizado en el propio conocimiento matemático escolar.

El r-Rediseño del discurso matemático escolar

En la actualidad, aceptamos que el dME excluye la construcción del conocimiento matemático ya que sus lineamientos y fundamentos están regidos sobre las caracterizaciones de atomización de los conceptos, carácter hegemónico, carácter utilitario, falta de marcos de referencia, y también por considerar que la matemática es un conocimiento acabado y continuo (Soto y Cantoral, 2014). Por este motivo, la teoría socioepistemológica ha planteado desde sus inicios la necesidad de un r-Rediseño del discurso matemático escolar (rdME y RdME).

Hablar de r-Rediseño del dME tiene una doble acepción (Cantoral, 2013):

- **rediseño del discurso matemático escolar (rdME)**: refiere a la elaboración de propuestas de enseñanza basadas en una epistemología renovada, que será palpable en situaciones de aprendizaje llevadas al aula por los docentes. Aquí están las estructuras objetivables del dME: libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otras.

- **Rediseño del discurso matemático escolar** (RdME): refiere a una ruptura de orden epistemológico que precisa de un nuevo paradigma respecto al saber matemático, cuya transición se ha estructurado con base en los principios de la teoría socioepistemológica. Los elementos principales son: carácter funcional, racionalidades contextualizadas, validación de saberes (conocimientos construidos) y pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación.

Entonces, en contraposición —no como dicotomía, sino como divergencia— a "la matemática escolar" que vive en —y gracias al— *discurso matemático escolar* (dME), que se centra en los objetos matemáticos (definiciones, procesos, algoritmos…), se trabajó con el "saber matemático escolar" centrado en las prácticas asociadas a los objetos para promover un rediseño del dME. Esta distinción hace de la socioepistemología una teoría alternativa para fundamentar los objetivos de la maestría que la ENSFO (Oaxaca) se estaba proponiendo.

La divergencia entre ambas visiones se clarifica cuando alcanzamos la noción de "saber matemático escolar" como objeto de enseñanza y aprendizaje, cuya construcción se sustenta en la visión alternativa de la *evolución pragmática*. Años atrás hemos establecido esta diferencia desde la teoría socioepistemológica, haciendo mención de *la* matemática y *lo* matemático, como, por ejemplo: la trigonometría y lo trigonométrico (Montiel, 2011); la variación y lo variacional (Caballero, 2012; Cantoral, 1990; Cabrera, 2009); la periodicidad y lo periódico (Buendía, 2010); el logaritmo y lo logarítmico (Ferrari y Farfán, 2010); entre muchos otros. Es decir, lo que durante años se ha denominado teóricamente como el tránsito del conocimiento al saber, como sintetizó Cantoral (2013), se hizo explícito en la diferenciación semántica de las terminologías para con el conocimiento matemático: el *lo* y el *la*, no son sólo retórica.

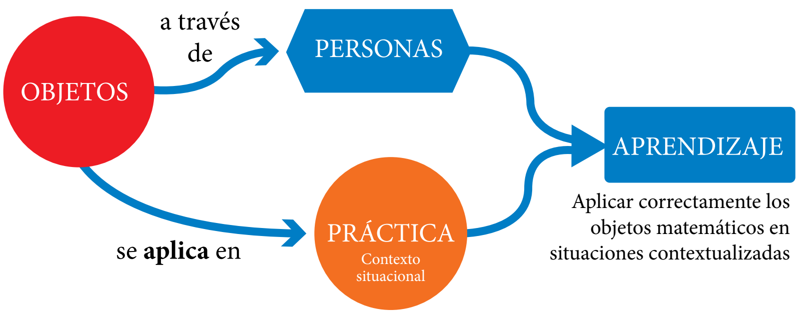
La noción de aprendizaje desde la teoría socioepistemológica

Dada esta nueva relación con el conocimiento matemático, tendremos una caracterización alternativa para la noción de aprendizaje. Esta se refiere al proceso de adquisición del conocimiento (de algo), ya sea a través del estudio y/o de la experiencia. En el área de matemáticas y, en particular, desde la postura socioepistemológica, diferenciamos entre el aprendizaje de la matemática escolar y el aprendizaje del saber matemático escolar.

El proceso de aprendizaje de la matemática escolar (*la* matemática) refiere a la significación de conceptos abstractos, dosificados al nivel escolar de enseñanza. Una de las maneras disponibles para abordar la significación se basa en la teoría de los registros semióticos de representación: el cambio de representaciones o símbolos será, entonces, la base del aprendizaje. Sobre ello, observamos dos dificultades: por un lado, la confusión de que la representación es el "nuevo meta objeto" (D´Amore *et al.*, 2015) y, por el otro, que, aunque se tenga una correcta transición entre las representaciones y un conocimiento de ellas, todavía así puede no encontrarse significado para "la vida del estudiante". Sin embargo, reconocemos una ventaja, pues este tipo de aprendizaje a partir de las distintas representaciones permitirá, posteriormente, aplicar el nuevo conocimiento adquirido a diversos problemas matemáticos escolares y darles la solución correspondiente.

El proceso de aprendizaje de la matemática escolar tiene sus inicios en una enseñanza y un aprendizaje basados en objetos que se aplicarán, a posterioridad, en tareas que tengan un contexto situacional determinado (Fig. 2). Es decir, se explicará de la mejor manera posible un tópico matemático y, más tarde, se aplicará este conocimiento aprendido en alguna situación de la vida real. La matemática escolar tiene una racionalidad universal que lleva a que las respuestas matemáticamente correctas habitualmente sean únicas. Esto permite una clara delimitación entre *lo que está bien* y *lo que está mal*, por tanto, agiliza y hace concreta la actividad de evaluar. En otras palabras, el dME enuncia lo que está fuera y dentro de la actividad matemática (Soto y Cantoral, 2014).

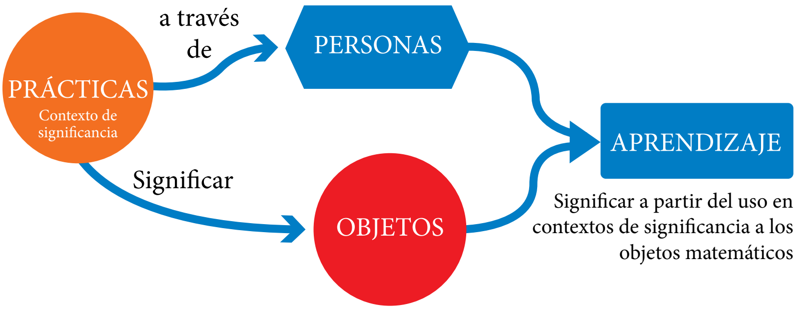
Figura 2. Aprendizaje centrado en objetos



Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, el proceso de aprendizaje del saber matemático escolar (Fig. 3) desde la teoría socioepistemológica de la matemática educativa refiere a la significación situada de los objetos matemáticos mediante el uso (*lo* matemático). *Lo que hago* construye conocimiento y desarrolla el pensamiento matemático. En lo que hago, aprendo. La garantía del aprendizaje no refiere, únicamente, a la correcta aplicación del conocimiento aprendido, sino a la habilidad de significar al objeto matemático mediante los usos del conocimiento, es decir, a partir de lo que hago puedo darle significados al conocimiento matemático abstracto. Diremos, entonces, que las personas *saben matemáticas*, en tanto evaluación, si pueden ponerla en uso dentro y fuera de la clase de matemáticas, dentro y fuera de la escuela (no basta resolver tareas típicamente escolares mediante técnicas más o menos sofisticadas). Si pueden usarla, aun antes de conocer su estructura axiomática formal, de esta manera estarán desarrollando su pensamiento matemático. Se pretende darle el estatus de *saber* al *conocimiento matemático escolar*, es decir, hacerlo funcional y dotarlo de significado mediante el uso, por

Figura 3. Aprendizaje centrado en prácticas



Fuente: elaboración propia.

encima de la resolución de tareas de la matemática escolar. De aquí nuestra concepción de la resignificación del conocimiento matemático: dar nuevos significados progresivamente.

Un programa basado en prácticas conlleva a una reestructuración de la noción de aprendizaje, la cual se sustenta en una racionalidad contextualizada y una visión socioepistemológica del conocimiento matemático. Un programa de este tipo precisará de una red de reestructuraciones que acompañen la evolución. Una de ellas son las *situaciones de aprendizaje*: herramientas didácticas sustentadas en *prácticas*. Las y los profesores oaxaqueños se encargaron de diseñar este tipo de situaciones durante su maestría.

La autonomía: de estudiantes de maestría a tutores

El episodio que vamos a mostrar a continuación tiene como protagonistas a Rebeca, Óscar y las y los profesores de la segunda generación de la MEMES. Óscar y Rebeca fueron seleccionados por su disposición e interacciones con la tutora del seminario de desarrollo del pensamiento proporcional, para formar parte de las tutorías de la segunda generación. Si bien el trabajo que realizamos (de aproximadamente cien horas reloj) y su análisis ha sido presentado en ocho episodios, mostraremos aquí una sección de un episodio (el segundo, en particular) para evidenciar el tipo de interacciones provocados y las reflexiones alcanzadas (Reyes-Gasperini, 2016).

Tutores: Rebeca y Óscar

Rebeca y Óscar son, como dijimos, estudiantes de la primera generación de la MEMES, destacados por sus reflexiones y su disposición a ser parte del proceso como tutores. Ella es licenciada en Matemáticas, con 17 años de experiencia docente. Su inquietud mayor siempre fue entender cómo piensan las personas. Él es licenciado en Ciencias de la Computación y en Educación Secundaria con especialidad en matemáticas. Profesor de matemáticas en una comunidad de Oaxaca desde hace once años. Ambos son los primeros profesionistas de sus familias, que provienen de zonas de trabajo humilde o marginal. Son miembros de un cuerpo docente que creó un programa alternativo de educación, pues no aceptaban la imposición de un currículo federal. Como profesores destinaron casi la mitad de sus sábados, durante más de dos años, al trabajo en la maestría. Una vez realizada la maestría dedicaron varias semanas de trabajo intenso para ser tutores de una nueva generación de la maestría. Son profesionistas de la educación que llevan la bandera de la transformación y que no aceptan cualquier oferta.

Contexto: trabajo colectivo

Con Rebeca y Óscar se trabajó durante un mes en jornadas intensas —los fines de semana y entre semana cuando terminaban sus clases—, para preparar lo que sería el seminario sobre el desarrollo del pensamiento proporcional titulado: de la proporcionalidad a lo proporcional. Ellos vivenciaron la tarea de resolver las actividades que estaban diseñadas, a la vez que plantearon cómo rediseñarlas para trabajar con los colegas de la segunda generación. Su misión era llevar a cabo las interacciones para promover la problematización de la matemática escolar.

El episodio: el plan de clases – la razón como cociente incremental

El episodio consta de un primer acontecimiento en el cual Rebeca propone discutir un plan de clase que se relaciona con la noción de semejanza revisada en un encuentro anterior. Esta sección tiene como objetivo problematizar la matemática escolar relativa a lo proporcional. Posteriormente, se promueve la interacción con los miembros de la segunda generación de la MEMES, cuyo objetivo es promover la problematización. Se desarrolla la discusión, contextualizada en la propia matemática, sobre la noción de razón como cociente incremental.

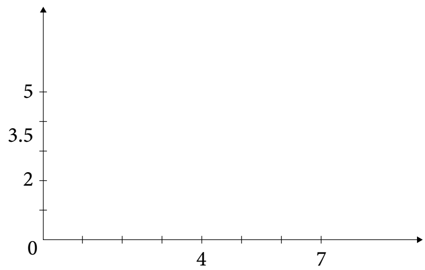
Acontecimiento A: razón como invariante

A partir de una tarea específica en el contexto propiamente matemático de la graficación, se desarrolla la diferencia entre la razón entre las variables y la razón entre las diferencias de las variables. Es decir, la diferencia entre la constante de proporcionalidad $\left(\frac{y}{x} = k\right)$ y la pendiente de la recta $\left(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ o la razón de cambio $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$. Se trabaja con una actividad de un plan de clase que se enuncia a continuación para comprender la discusión:

> *Se quiere ampliar una fotografía cuyas medidas son 4 cm de largo por 2 cm de ancho, de tal manera que el homólogo del lado que mide 4 cm, mida 7 cm en la fotografía ampliada, ¿cuánto deberá medir el otro lado?*
>
> CONTENIDO: 9.1.2: *construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.*
>
> INTENCIONES DIDÁCTICAS: que los alumnos verifiquen que los vértices de rectángulos semejantes que tienen un vértice común, son colineales.

• CONSIGNA: en equipos resuelvan el siguiente problema.

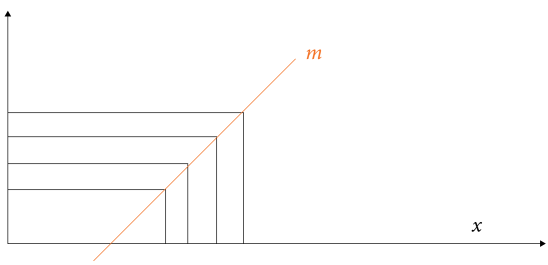
Tracen los rectángulos que muestran el tamaño de las fotografías de la sesión anterior sobre el siguiente plano cartesiano, ubicando uno de sus vértices en el origen de éste y tracen otros dos rectángulos semejantes a los dos primeros, de manera que coincidan con el punto (0,0). Expliquen cómo pueden saber que los dos últimos rectángulos son semejantes a los primeros.



• Consideraciones previas:
Es probable que los alumnos justifiquen la semejanza estableciendo la razón entre los lados de los rectángulos dibujados; sin embargo, también se les puede preguntar qué se observa con respecto a los vértices que no están sobre los ejes del plano y establecer que todos ellos quedan sobre una recta, por lo que son colineales.

También se puede concluir que los segmentos paralelos entre dos líneas secantes son proporcionales; en este caso las secantes son x (eje horizontal) y m (línea) que une los vértices de los rectángulos (teorema de Thales).

Figura 4. La imagen del plan de clase



Fuente: elaboración propia.

Se comienza con la *Sección 1: la razón de las diferencias y la razón de las magnitudes* donde se analizará a Óscar y Rebeca construyendo la idea de la razón de las diferencias para analizar aquello que se mantiene constante más allá de la razón de las variables; para luego pasar a la *Sección 2: linealidad y proporcionalidad*, donde se estudiará el trabajo con los estudiantes (profesores) confrontando la idea de que, aunque una relación no sea proporcional, pero lineal, hay algo que se mantiene constante: la razón de cambio.

A. Sección 1: la razón de las diferencias y la razón de las magnitudes

Con el plan de clase en mano, se comenzó a cuestionarlo. Rebeca lee la consigna y afirma:

Rebeca: Y aquí te va dando la idea de homotecia, ¿no? Para que llegue hasta este punto, pero ya no es el mismo rectángulo.

La primera observación es que "no es el mismo rectángulo", basada en argumentos intuitivos de coincidencia de forma.

Rebeca: ¿Tú crees que sea el concepto de linealidad también?

Óscar: Yo creo que sí. Eso es lo que puse.

Rebeca: Concepto de linealidad, ¿la pendiente de una recta?

Óscar: Ajá, que es la misma razón. Tenemos que ver de qué se dan cuenta los alumnos, ¿de la línea?, ¿de la razón?

Se observa una relación directa entre las nociones de razón, constante de proporcionalidad y pendiente de una recta que, desde la previa problematización del saber matemático, como se dijo en el apartado de la propuesta de innovación, es importante distinguirlas de la siguiente manera:

$m = \frac{y}{x}$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Constante	Pendiente	Razón de cambio

Rebeca: De la razón y de la semejanza, ¿no?

Óscar: De la semejanza.

Rebeca: No creo que lleguen al pensamiento de la recta.

Óscar: O decir "ah mira, aquí todas quedan sobre la línea".

Rebeca: Y que unan los puntos. Pero para decir que son ¿colineales?

Óscar: No creo. Creo que sí, eh, creo que sí. Con otras palabras. Digo porque hasta yo, pues, no dije colineales, dije que están sobre la misma línea. Entonces, pero… eso y que digamos, que pensemos que digan que son semejantes, que tienen los mismos ángulos si es que tienen fresco tratar con lo de la semejanza, yo soy malo para eso. Lo que no creo es que de inmediato den la razón, aunque se den cuenta que esa línea que vieron es la razón, es la pendiente. O sea, si van a ver la línea, yo creo que es lo primero que van a ver, ya si ponen atención… van a ver que son semejantes.

La discusión planteada entre Óscar y Rebeca pone en discusión la necesidad o no de la nomenclatura de los conceptos matemáticos en los comienzos de la explicación. En este caso, la idea de colinealidad y "estar sobre la misma línea" parecieran poder trabajarse de la misma manera, con el fin de que la precisión no deba sentirse como una obligación sino como una necesidad.

Cuando Óscar dice "hasta yo, pues, no dije colineales, dije que están sobre la misma línea", es para nosotros muestra de la importancia de que los profesores vivan la situación de aprendizaje, pues desde su propio cuestionamiento de la matemática escolar, surgen aspectos sobre la didáctica de la matemática específica.

Rebeca: Bueno cuando lo vi y lo hicimos en el salón, lo único que pude identificar fue que con eso daba algún principio de la semejanza que era que sus ángulos fueran iguales, y creía que eso iba a ser, que sus ángulos eran iguales, un principio de la semejanza. Y que sus lados iban a ser diferentes. Eso es lo único que observé. Y ahorita, platicando con Óscar, le digo que ya no… que el pensamiento de linealidad y la pendiente de la recta. Bueno, yo ahora puedo ver eso que antes no veía. Antes veía que establecían y dejaban bien claro ese principio de la semejanza [se refiere al de los ángulos].

Rebeca hace un análisis crítico de su actividad áulica de un periodo anterior a nuestros encuentros, donde reflexiona sobre la confrontación de las interacciones con sus estudiantes antes de la problematización de la matemática escolar, con las que podría provocar después de ella. Este es un ejemplo palpable de que, aunque se realice un rediseño de las estructuras objetivables, como libros de texto, programas, orientaciones didácticas y demás, si no se acompaña con procesos de desarrollo profesional docente, los cambios quedarán en los papeles, pero no en los hechos, sea cual fuere el enfoque teórico de dichos diseños.

Se retoma el enunciado de la tarea que refiere al teorema de Thales y se pregunta "¿se fijaron la gráfica que dibujan ellos?" (Fig. 4).

Daniela: ¿Qué tiene de particular?

Óscar: Que puede llegar a confundir sobre proporcionalidad, o sea… Porque esa razón se dice que son proporcionales [se interpreta que está refiriéndose a *y* entre *x*] y… pero aquí la están sacando del origen, no va a pasar por el origen esa línea.

Daniela: ¿Y entonces?

Óscar: Tal vez en ese momento no haya ningún conflicto, pero se están dando cuenta, posiblemente, que sí se mantiene una razón de cambio, un cambio proporcional en las figuras, en el momento que quieran llevarlo eso al plano cartesiano, ellos habrán visto que podía darse, este cambio, sin que esa línea pase por el origen. Creo que me estoy expresando mal.

Si bien la explicación de Óscar no es "transparente", puede interpretarse que está explicando, por la negativa, la necesidad de que la gráfica de la función proporcional sea una recta que pase por el origen: "un cambio proporcional en las figuras… ellos habrán visto que podía darse sin que esa línea pase por el origen" y este hecho les generaría confusión. Recordemos que se está retomando la idea de las fotografías que se amplían de manera proporcional. El cambio proporcional es resultado de la *relación* de los lados de la foto que mantienen la misma razón, pero en la gráfica se comete el error de sacarla del origen, lo cual cancela el invariante de la relación.

Adviértase que, si la relación no fuese sustentada en la *contextualidad* y en la *funcionalidad*, nuestra afirmación podría considerarse incompleta o errónea, dado que toda función lineal (proporcional y no proporcional) mantiene su razón de cambio constante; sin embargo, en el contexto específico de esta tarea, desde el comienzo se hace referencia a que la razón entre los lados de la fotografía debe ser constante.

Al analizar la gráfica Rebeca afirma: "Pues que es una constante de proporcionalidad y que van a… que va aumentando como de… el aumento es el mismo, sí y que no cambia". Se interpreta que la idea de que "el aumento es el mismo" está centrada en un razonamiento aditivo simple, lo cual Óscar refuta asegurando que eso llevará a los estudiantes a pensamientos erróneos.

Óscar: Yo vi primero aquí en la línea que no es proporcional. Ya tal vez me estoy adelantando y pensando que como no pasa por el origen no va a ser proporcional. Pero, además, decía yo, cuando empezó a explicar que, si se le sumaba pues no, no se va a dar. Porque si mide 1 y 4, suponiendo, le sumo 1 de ambos lados, en un lado meto el cien por ciento, bueno la razón sería 2 y del otro lado sería aumentó un 25 por ciento, la razón sería 1 sobre 25…

Daniela: ¿1 sobre 25?

Óscar: Punto cinco, la mitad, punto 25.

Daniela: Punto 25, 25 sobre 100.

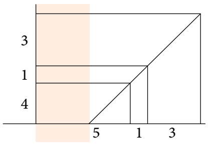
Óscar: Eso, aumentó 25 por ciento, entonces no es proporcional. Y nos lleva a una idea equivocada con los alumnos, el pensar que si le aumentamos la misma cantidad a una figura de los dos lados es un incremento proporcional, lo va a confundir precisamente que no es lo mismo cuánto aumenta a la forma en que aumenta.

Óscar usa dos ideas distintas para el aumento de cada uno de los lados. Para el primero, asegura que aumenta un 100 por ciento y por eso la razón es 2 (2 es a 1), mientras que, para el segundo, dice que aumenta un 25 por ciento y que la razón es 0.25. Si la razón fuera 0.25 la imagen debería reducirse, por lo cual, 0.25 no es la razón, sino que debería ser 1.25. Sin embargo, él se enfoca en cómo fue el aumento para cada uno de los lados, y dado que 100 por ciento no es lo mismo que 25 por ciento, concluye que no es un aumento proporcional. De esta manera argumenta por qué no puede decir que "si sumo lo mismo de ambos lados" el aumento es proporcional.

Se profundiza la explicación con Rebeca sobre esta diferencia de las sumas y se pregunta sobre cuál es la relación que sí se mantiene constante, ya comentada por Rebeca (razón de cambio).

Óscar: El hecho de que se le vaya sumando uno nada más. Eso se mantiene constante, pero no es la razón [está hablando de la razón entre las variables].

Daniela: Sí. Ahora. Sí podemos ver una relación, si ustedes anulan esta parte [parte azul de la imagen].



Rebeca: El triángulo, ¿no?

Óscar: Ah, sí. Pasaría por el origen que intersecta a la recta.

Rebeca: Este ángulo es constante [señala el ángulo de inclinación de la recta].

Daniela: Y la relación entre el lado de abajo… [refiere al incremento en *x*]

Rebeca: Y el de acá [refiere al incremento en *y*].

Daniela: Claro, esa relación también se mantiene constante.

Óscar: Ahora esa confusión es de los docentes también [risas].

Al "recorrer el eje de las *y*" se arman nuevas relaciones entre los segmentos y se observa que la razón de cambio, aunque no pase la recta por el origen, sí se mantiene constante. Se da el ejemplo del taxi donde lo que se mantiene constante es el valor de la ficha, aunque el banderazo se sume sólo al comienzo, a lo cual Rebeca agrega:

> Rebeca: Entonces es una recta $y = mx$ más algo.
>
> Daniela: Exacto, $y = mx + b$. Entonces, lo que no puede ocurrir es que su razón, entre el valor de *y*, en esta función el valor de *y* es $y = mx + b$. Las funciones de proporcionalidad son del tipo $y = mx$, entonces $\frac{y}{x}$ es igual a la constante. Pero $y = mx + b$…
>
> Óscar: Afín.
>
> Daniela: No vas a poder conseguir una constante, la relación entre esta variable y esta variable no va a ser constante.
>
> Óscar: Eso me costó mucho entenderlo. Es que la línea sigue… su pendiente sigue igual, entonces no cambia, es constante pensaba yo, pero no consideraba el hecho de que… veía igual que pasara por el origen, pero es la misma pendiente, pero no.

Óscar pone en palabras lo que para nosotros es la base fundamental de los conflictos con la linealidad y la proporcionalidad: para toda función lineal hay algo que se mantiene constante y es su razón de cambio, lo que se ve como la pendiente, pero sólo para la lineal proporcional, también es invariante la razón entre sus variables.

> Daniela: Pero fíjate, su pendiente se mantiene constante. O sea, su pendiente sí es constante.
>
> Óscar: Lo que difiere es el banderazo, lo que me cobran.
>
> Daniela: Claro, lo que difiere es el banderazo. A lo que tenemos que llegar es a explicar por qué la relación de proporcionalidad, si su relación entre las variables es constante, acá no. O sea, hay algo proporcional, sí, pero acá no es constante. Pero ¿que sí es constante?
>
> Rebeca: El incremento.
>
> Daniela: Exactamente, la relación: lo que crece.

Rebeca hace una aportación fundamental para esta tarea y para el desarrollo del trabajo: lo que se mantiene constante es el incremento (razón de cambio). Entonces, al haber trabajado con la idea de que la proporcionalidad está relacionada con la noción de "cómo crece" y cuya respuesta podría ser "de manera constante", ahora vamos a poner en duda esa noción, pues el aumento constante (razón de cambio) no garantiza la razón invariante entre sus variables (constante de proporcionalidad).

Surge la dificultad de observar las diferencias ($y_2 - y_1$ o $x_2 - x_1$) o la razón entre esas diferencias $\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$.

Rebeca: Pero los incrementos, aquí se mantienen constantes… cuatro, cuatro… aquí es cuatro, ¿no?

Óscar: Sí.

Rebeca: Aquí también es cuatro…

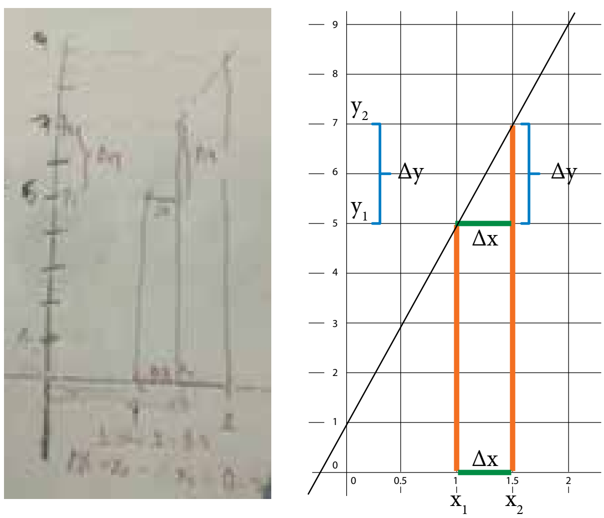
Óscar: Porque es la pendiente, ¿no? Es ésta [apoya una pluma sobre la recta para mostrar la pendiente] y esa sí se mantiene constante. Porque estás sacando eso del y, de los incrementos, eso de $y_2 - y_1$, sobre $x_2 - x_1$…

Rebeca: Y aquí mira, ¿por qué este es igual y esos son diferentes? Aquí es constante… ¿ya viste? Pero aquí no, las diferencias no son constantes, dirías tú, la pendiente sí, pero las diferencias no.

Hasta aquí se hace evidente que las diferencias no son constantes, entonces Daniela interviene y afirma "las diferencias no son constantes… ¿pero?", a lo cual Rebeca afirma, "pero sus incrementos sí", este hecho es ejemplo de la necesidad de pasar del comportamiento de la variable, al comportamiento de la relación.

A continuación se observa, en la Fig. 5, la idea de las diferencias y sus razones:

Figura 5. Imagen del pizarrón donde anotan los incrementos (izquierda). Reconstrucción del pizarrón (derecha)



Fuente: elaboración propia.

Rebeca: 1.5 - 1 y aquí sería 0.5. O puedo escribir que de acá a acá es el incremento de x_1 y aquí puedo decir que es el incremento de x_2, podría decir el incremento de x_2 menos el incremento de x_1, me va a dar 0.5.

Daniela: En realidad, es… un incremento es una diferencia… Tú aquí dirías, éste es x_2 [señala 1.5].

Rebeca: Ah, sí, este es x_1 [señala 1].

Daniela: Ok, y ¿cuál es el incremento?

Rebeca: El incremento de x es 0.5.

En este caso era necesario hacer una aclaración sobre el vocabulario matemático, ya que estaba siendo empleado de manera incorrecta. Nótese que el cuestionamiento del discurso hablado aparece cuando podría generar confusión dentro de la disciplina y no cuando se considera como utilización de un vocabulario informal.

Daniela: Va, ¿y dónde se ve en la gráfica?

Rebeca: Es la diferencia.

Daniela: ¿Dónde está esa diferencia?

Rebeca: Podría pensar que está acá [señala sobre el eje y].

Óscar: Aquí está [señala la distancia entre 1 y 1.5].

Daniela: Si x_2 es todo esto [señala el segmento de 0 a x_2], menos x_1 que es todo esto [señala el segmento de 0 a x_1], ¿qué me queda?

Rebeca: Ese pedacito [señala el incremento en x].

Daniela: Va. Y el incremento de y, ¿cómo lo ves?

Rebeca: De acá a acá, que sería y_1.

Daniela: Ok.

Rebeca: Entonces, el incremento de y sería $y_2 - y_1$. Es este pedazo que ves de acá a acá.

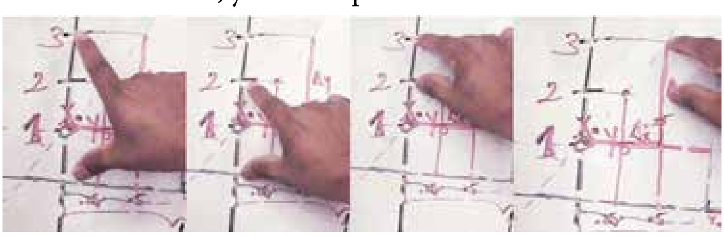
Daniela: Fíjate, este pedacito lo puedes llevar hasta acá.

Rebeca: Sí, y éste y lo puedo llevar hasta acá… Ah, ahora ya entendí lo de las diferencias.

La graficación se convierte en un marco de referencia donde significan las fórmulas que se presentan en la matemática escolar. Con la ayuda de la representación gráfica de la función se confronta la idea de las diferencias y los incrementos: al observar dónde es que se puede asegurar que la razón de cambio es constante, se percibe la razón de las diferencias y a la vez, de manera gráfica, se identifica la pendiente. La gráfica no es la re-presentación (del volver a presentar), sino es un espacio de construcción de conocimiento.

Se hacen varios ejemplos para comprender cómo visualizar en el gráfico la idea de los incrementos.

Figura 6. Visualización de Δy. En orden indica: y_2, y_1, la diferencia, y el correspondiente en otra abscisa



Fuente: trabajo realizado por Óscar en una sesión presencial.

Hubo dificultad en la interpretación de que la razón de las diferencias es la que se mantiene constante y no las propias diferencias. Este hecho puede considerarse indicio de la necesidad de profundizar en ello. A esta altura, Daniela hace la siguiente intervención:

Óscar: Entonces en todos los triángulos que tenemos ahí, todos los triángulos son proporcionales, semejantes.

Daniela: Fíjense. La relación entre las diferencias es constante. Las "diferencias" es preguntarnos "cuánto cambia", ¿no? Entre éste y éste, ¿qué pasó?, ¿cuánto cambia? Y después lo restamos, encontramos las diferencias. Y mi relación, en este caso, va a ser una razón… ¿Cuánto cambia? Es el incremento, Δy e Δx. Y ¿cuál es el nombre que nosotros le damos también a la pendiente? Razón de cambio, entonces, eso es la relación entre los cambios. ¿Quiénes son los cambios? Δy y Δx. Entonces la razón de cambio significa la relación entre estos cambios (Δy y Δx) que, aunque esté en una recta que no pase por el origen, se mantiene constante. ¿Pero qué es lo que no se mantiene?

Óscar afirma que los "triángulos" que se forman entre los incrementos son semejantes; inferimos de ello la idea de la pendiente como invariante. Luego, se discute cómo puede interpretarse la idea de "razón de cambio", siendo *la razón* un tipo de relación específica y *el cambio* trabajado como los incrementos tanto en x como en y. A continuación, se discute sobre cuáles relaciones se mantienen constantes y cuáles no.

Óscar: Las diferencias son las que no se mantienen constantes. Ahí es –2, ahí es 3, ahí es –8… eso es lo que no se mantiene constante, pero la razón de cambio sí.

Daniela: ¿Qué es lo que nos garantizaba que fuera de proporcionalidad en una tabla de valores?

Óscar: Que la razón de cambio fuera constante… la razón… entre las…

Daniela: ¿Qué pasaba siempre en esta función ($y = kx$)?

Óscar: Que esa relación se mantiene constante [señala $\frac{y}{x} = k$]

Daniela: Acá tengo que la razón de cambio se mantiene constante [indica una función lineal no proporcional expresada en su manera tabular].

Óscar: Pero no la razón entre x y y.

Daniela: Entonces, la idea es, aunque mantenga la razón de cambio, la relación [razón] entre las magnitudes no se mantiene constante. Y la relación entre las magnitudes ¿qué es? Nosotros podemos decir relación lineal, relación cuadrática, relación cúbica… entonces podemos decir es una relación lineal, entonces la razón de cambio se mantiene constante. Pero mi pregunta es… ¿es de proporcionalidad o es afín? Porque si es de proporcionalidad, ¿qué va a pasar?

Óscar: Se mantiene constante la relación entre x y y.

Daniela: Si es afín, no se mantiene constante esa relación, pero en ambos casos…

Óscar: La razón de cambio se mantiene constante. Eso no lo habíamos visto. Esa es la gran confusión de "pero es línea".

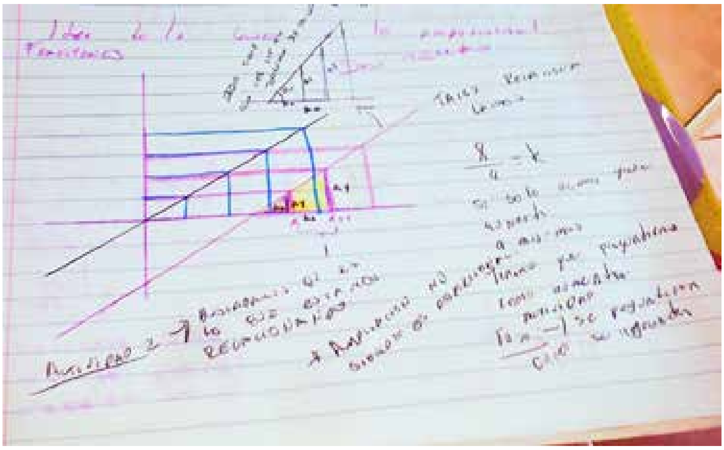
A esta altura, con ejemplos, contraejemplos y las interacciones donde la razón se trabajó como comparación y se construyeron distintas relaciones, se comenzó a trabajar la diferencia entre linealidad y proporcionalidad, desde la matemática formal, vista la linealidad como una función afín (con ordenada al origen distinta de cero).

Concluida esta interacción, se tomó la decisión de incorporar la discusión sobre este plan de clase para analizarlo en la sesión del seminario; fue Rebeca quien guio la discusión.

A. Sección 2: linealidad y proporcionalidad

En la última sesión se dejó de tarea la revisión del plan de clase. A continuación mostramos (Fig. 7) lo que Rebeca había preparado en su cuaderno para discutir con los profesores de la segunda generación:

Figura 7. Diseño de la tarea, según Rebeca, a discutir con estudiantes (profesores)



Fuente: trabajo realizado por Rebeca de manera individual.

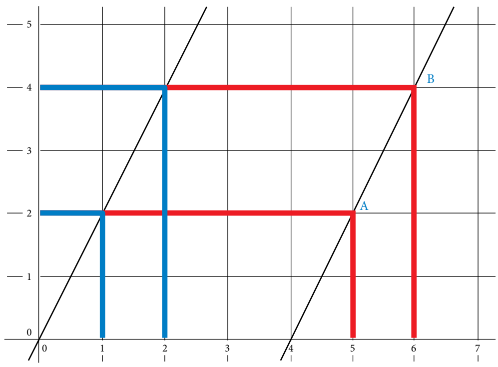
Si bien se pueden leer varias ideas en sus anotaciones, hay tres en particular de nuestro interés: "Actividad 2 → buscamos qué es lo que estamos relacionando"; "tenemos que preguntarnos cómo aumenta. Actividad FOTO → se preguntan cómo se agrandan" y la carencia de números en su gráfico. Las tres muestran la relación al saber, sustentada en la *funcionalidad* por parte de Rebeca, ya que en su planeación, realizada sin supervisión, no utiliza números y está centrada en preguntas del tipo "relación". Esto es evidencia de que la discusión que quiere emprender no tiene que ver con el correcto proceder numérico, sino con la noción fundamental de la proporcionalidad: la relación como razón invariante entre las magnitudes. Se interpreta que el objetivo es mostrar la diferencia entre la razón constante entre las variables $\left(\frac{y}{x}=k\right)$ y la razón constante entre las diferencias $\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k\right)$.

Durante la clase, Rebeca plantea la situación a discutir:

Rebeca: Cuando me dicen que los vértices que tengo… que si son suficientes los argumentos de que "si uno los vértices colinealmente voy a tener siempre… [voy a] establecer esa relación de semejanza entre los triángulos". Porque me da en este caso, y en las consideraciones previas me dan el otro. Entonces voy a ver que no siempre se cumple. En este caso, que sean semejantes estos triángulos y en este caso si son semejantes, sí puedo decir lo mismo. Quiero ver si este rectángulo, si es semejante a éste y es semejante a éste. Y si en el rectángulo rojo establezco la semejanza entre los rectángulos, a partir de la colinealidad de mis puntos, de mis vértices.

Su planteamiento parece confuso, sin embargo, busca confrontar la afirmación sobre la colinealidad que garantiza la semejanza, retomando la idea, expresada en el plan, que asegura que la unión de los vértices colineales establece una relación de semejanza entre los rectángulos (Fig. 8).

Figura 8. Representación del texto de Rebeca en la cartulina



Fuente: elaboración propia.

E1: Existe una proporción directa en la proporción entre los ejes *equis* y *ye*, directa. En este caso, de 1 le corresponde 2, de 1 a 2, también le corresponde 2, de 2 a 4 también le corresponde 2. Y en el otro caso no, de 4 a 5 le corresponde… 5 le corresponde a 2 y luego 6 le corresponde a 4. Entonces, no hay una proporción, porque si yo divido 2 entre 5 no es lo mismo que 4 entre 6.

Rebeca: La primera es 5 entre 2, 6/4 y 7/6.

E2: No se me mantiene constante.

En el contexto gráfico los estudiantes (profesores) construyen la idea de que la razón entre sus variables no es constante, aunque sin duda refiere a una función lineal.

E3: A mí me brinca aquí una duda. Yo sabía que para que haya semejanza los puntos son cortados por una diagonal, se llaman puntos colineales. Deben ser que todos los puntos sean colineales en una recta y eso también es semejanza. Pero aquí ya me está… ya se me está moviendo todo, ¿no? Yo tenía eso, pero ahorita se me está moviendo. No encuentro la relación ahora, esa es mi duda.

El estudiante E3 está en el momento exacto para “aprender”, dado que aquello que para él era seguro, ahora se pone en duda mediante una situación particular. Lo que es expresado por E3 era el objetivo que se quería lograr con la tarea planteada.

> Rebeca: Por eso yo les preguntaba si era suficiente decir… ¿establecer esa colinealidad entre los vértices era suficiente para decir, para establecer ese criterio de semejanza? Y aquí, puedo observar en éstos… aquí ($y = 2x$) hay una colinealidad, pero también aquí ($y = 2x - 8$)y si lo veo así, como decía…
>
> E3: Sí, yo estoy viendo semejanza de los puntos colineales. Lo que pasa es que aquí hay otros puntos colineales, entonces es este rectángulo con este otro y con este otro. Entonces desde ese punto de vista no son rectángulos.

Dada la observación de E3, Rebeca explica de manera clara cuál es la discusión que quiere llevar a cabo con el grupo sobre la suficiencia de la colinealidad para hablar de semejanza. E3 expone nuevamente su postura de que la semejanza se relaciona con la colinealidad y termina agregando la justificación de que “desde ese punto de vista no son rectángulos”, a lo cual, una estudiante (profesora) lo confronta:

> E2: Sí me gustaría complementar lo que acaba de decir el compañero. Sí se forman rectángulos y van a seguir siendo triángulos rectángulos, pero la razón de éste entre éste [refiere al cociente incremental considerando los puntos (5,2) y (0,0), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{5-0}$] no es la misma que éste [refiere al cociente incremental considerando los puntos (6,4) y (0,0), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{6-0}$], si observamos aquí está al doble [refiere al Δy que para los primeros puntos es 2 y para los segundos es 4]. Sí, pero aquí ya no es, es lo que hacíamos con el primer ejercicio de las fotos ¿sí? Si la jalamos hacia un lado, y no le aumentamos lo mismo, no va a ser proporcional, aunque estos puntos van a seguir siendo rectángulos. Yo ahorita recordé esto porque así lo maneja, cuando nos dijeron que compararámos las situaciones. Primero estaba en la misma idea, cuando iniciamos la clase, de cuáles eran semejantes y no. Y luego, cuando vimos las fotos y cuando empezamos a mezclar otro tipo de informaciones y me voy a esto, pero el libro de texto que yo revisé, porque yo doy terceros, también manejan lo mismo.

E2 retoma la reflexión cualitativa en un ambiente cuantitativo: la idea que en el episodio anterior (no tratado en este artículo) era “jalar la foto”, y que no se podía hacer porque desfiguraba la imagen, aquí refiere a que el jalar la foto se transforma en hablar de incrementos y su razón, es decir, del cociente incremental. Con esto, Rebeca logra confrontar la idea de la constante de proporcionalidad con la idea de la razón entre las diferencias.

> E3: Con lo que dice E2, a mí me sigue quedando la duda. Son rectángulos, ¿no? Entonces, son colineales. Entonces ¿ahí no hay semejanza? [dibuja en el pizarrón rectángulos encimados].
>
> E2: Ahí sí, porque coinciden todos sus vértices en el mismo punto. No… En el centro.

E3: Entonces, si hago yo… estoy así, aquí está tu cero [hace lo mismo que hicimos en la Sección 1 de "trasladar el eje *y*" hasta la raíz de la otra recta] O sea, nomás recorrí el eje de las *yes*. Si estaba aquí lo recorrí hacia acá. Este es el eje de las *yes*, y aquí está tu semejanza.

E2: Sí, pero tú, lo que acabas de decir ahí no coinciden todos en el centro. En éste que está aquí no coinciden como en ése. No coinciden en el centro del rectángulo.

E3: Pero ¿estamos buscando la semejanza entre éste y éste? ¿O de éste con éste?

Todos: No, todo el rojo.

En este diálogo se evidencia la importancia de definir la referencia. Al comparar las relaciones es necesario tener claro cuáles son los segmentos que se comparan. Nótese que hablamos de "segmentos", pues los estudiantes (profesores), cuando comparan con sus dedos, refieren a una razón de diferencias, de segmentos o sólo de números dependiendo del tipo de argumentación, y cada uno de ellos tiene una interpretación particular. Asimismo, lo que se plantea es la necesidad de distinguir de manera precisa la referencia, pues este hecho es el que provoca equivocaciones al comparar dos rectángulos que no deberían ser comparados.

E1: Pero si analizamos más allá del rectángulo como tal… éste es un cuadrado, éste es un rectángulo, éste es un cuadrado… pero si vamos más allá con el conocimiento y analizamos las propiedades de los cuadriláteros dicen que su diagonal se corta en su punto medio. Entonces, si yo trazo una diagonal acá se está cortando en su punto medio. Y puedo afirmar entonces que este triángulo es semejante a éste. Por compartir una misma diagonal puedo decir que el criterio lado-ángulo-lado, es congruente. Son congruentes. Entonces, sí es congruente este triángulo con este triángulo. Por lo tanto, también es congruente este triángulo con este triángulo. Por lo tanto, puedo deducir que este triángulo es congruente…

Todos: Semejantes.

E1: Semejantes, semejantes, gracias. ¿Por qué criterio? Porque simplemente comparten el mismo ángulo y este ángulo es igual a 90 grados, ángulo-ángulo. Entonces puedo decir sí es proporcional este rectángulo con respecto a éste. Analizando el rectángulo desde el punto de vista de la congruencia de triángulos, de los criterios. Sin embargo, con este rectángulo ya no [refiere al rectángulo rojo]. Con este rectángulo ya no es congruente, porque mira dónde está la diagonal. Ya no se cortan en su punto medio. Entonces, yo creo que sí entran en juego otros conocimientos y que al final de cuentas estamos hablando de otros criterios que me pueden reafirmar el conocimiento matemático, tanto mío como el del chamaco.

Dentro del contexto matemático, en particular el geométrico, E1 construye un argumento a partir de las propiedades de los cuadriláteros para hablar de la semejanza de los cuadriláteros mediante la comparación de segmentos.

E4: Se acuerdan, uno de los ejercicios de los que partimos fue de la homotecia, que veíamos que la proyección era distintiva y que hablaba de una idea proporcional. Entonces si nos valemos de ese ejemplo, ahí lo podemos enlazar con éste y ver la diferencia ahí clarita. Incluso con el propio trabajo de lobos, cuando decíamos que se hacía la ampliación veíamos que el otro entonces era una deformación que estaba trasladada en el plano, cuando veíamos las fotografías. Entonces, ahí más o menos podemos ir viendo cómo desde un principio lo estábamos viendo que era algo distinto y ahora lo estamos viendo un poquito más concreto, pero es eso. Estaba en lo de las niñas y luego en lo de las fotografías.

La secuencia de las tareas tiene una evolución determinada que es percibida y evidenciada por E4: asegura que, esta situación, la cual proviene de la discusión contextualizada en la propia matemática escolar, se correlaciona con dos tareas previas.

Rebeca: Y en este caso ¿cómo podemos establecer las relaciones entre las variables?

E1: Dos es a uno, en este caso.

Rebeca: ¿Y el otro?

E2: No es proporcional pero sí hay una constante. Mantienen la misma constante y podemos encontrarla formando los incrementos. Bueno, voy a tomar las coordenadas: y_2 sería 4 y 4–2 sobre 6–5. ¿Sí? Entonces va avanzando dos, entonces la ecuación de ésta ya la podemos ir encontrando que era lo que nos decía hace rato que era parte de la tarea. Y entonces aquí si yo quiero encontrar la ecuación… Vamos a buscar la ecuación…

En la pregunta de Rebeca, centrada en la acción de *relacionar*, se evidencia la relación sustentada en la *funcionalidad* que hemos percibido en su planeación, lo cual da evidencia de que se parte de la reflexión y se consolida en la acción el objetivo planteado. No pregunta por valores numéricos, sino por el tipo de relación que debe establecerse.

La frase de E2 es de relevancia: "no es proporcional, pero sí hay una constante". Con esto se sintetizan las ideas principales de esta actividad: muestra las diferencias entre linealidad y proporcionalidad, al confrontar la razón entre las variables y la razón entre las diferencias, pues con la función de proporcionalidad y la función lineal no proporcional, muestra las relaciones. E1 habla de que la relación es "2 a 1", correspondiente a la gráfica de la función cuya expresión es $y = 2x$, mientras que, para la función cuya expresión es $y = 2x - 8$, E2 recurre a los incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{6-5} = 2$$

Con ello, asegura que "se mantiene la misma constante", dado que en la otra función también la razón de cambio es 2. Para concluir propone buscar la expresión algebraica de la función, desconocida para ellos. A lo cual Óscar objeta:

Óscar: ¿No te alcanzaría comparando nada más las diferencias que encontraste?

E1: Exactamente.

Óscar: Sí, mencionaste… las diferencias… ¿no te alcanza nada más comparando las diferencias? Podrías compararlas… ¿no te alcanza con eso?

E2: Sí, pero dame un segundo… voy a asimilar a dónde quiero llegar.

[Silencio]

La ecuación sería ésta ($y = 2x - 8$), éste es el punto donde va a cortar al eje de las *yes*, entonces es lo que yo explicaba hace rato allá en el aula que las coordenadas (0,–8) y (4,0) y cualquier punto es como va a quedar. Ésta es la ecuación de ésta. Y pues ésta es más sencilla, ésta es $y = 2x$.

Óscar interviene para mostrar que a partir de los datos que tiene, E1 ya tenía la razón de cambio y por tanto podía encontrar la expresión algebraica de la recta. E2 se queda en silencio unos segundos y piensa cómo podría, dado el comentario de Óscar, encontrar la expresión de la función sin aplicar lo que escolarmente se enseña: dados dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), en este caso (5,2) y (6,4), encontrar la pendiente de la recta como $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y luego reemplazar alguno de los puntos dados y m en $y = mx + b$, quedando $y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1 + b$ y despejar b para conseguir la expresión algebraica de la función. La propuesta de Óscar radica en cuestionar la automatización con la cual, a veces, se trabaja, pues, E1 podía encontrar la ordenada al origen con la información disponible, con base en la razón de cambio, sin llegar al manejo algebraico de los datos.

Luego de encontrar las expresiones algebraicas de ambas funciones, Rebeca comenzó a cerrar la discusión:

Rebeca: Bueno, entonces, para que sean semejantes, hay una condición muy fuerte.

E4: Su razón tiene que ser constante.

Rebeca: Sí, y además… hay otra más.

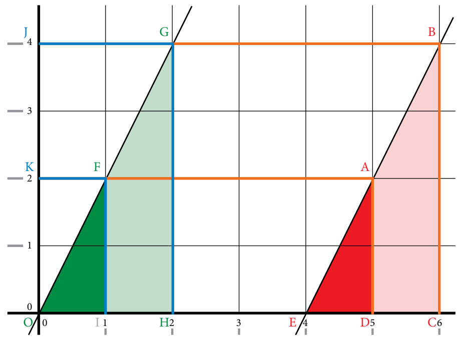
E5: Como decía el compañero, la razón $\frac{x}{y}$ tiene que ser constante y la única que lo cumple es la que pasa por el origen. Si no pasa por el origen, no es proporcional. No pasa nada más por la colinealidad, tiene que pasar por el origen para ser proporcional.

Al retomar la pregunta de partida de Rebeca "si era suficiente establecer la colinealidad entre los vértices para establecer el criterio de semejanza en los triángulos", E4 y E5 concluyen que la condición para hablar de semejanza se relaciona con que la razón se mantenga constante y, a la vez, la colinealidad no garantiza la semejanza, pues las funciones lineales no proporcionales no mantienen dicha razón.

Rebeca: Entonces, aquí cerramos y entonces, ¿qué podemos decir del plan de clase?

E6: Lo que pasa es que ahí también causa un problema porque mencionan el teorema de Thales. Y el teorema de Thales nos dice que los segmentos paralelos entre dos secantes ($\overleftrightarrow{EA}$ y $\overleftrightarrow{EC}$) son proporcionales. Y eso es lo que nos causa confusión, a veces nos queremos ir con ese teorema para querérselo aplicar a todo. Y en este caso queremos buscar la proporcionalidad entre éstos $\left(\frac{\overline{DA}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BJ}}\right)$ pero vamos a tener que comparar triángulos $\left(\frac{\overline{IF}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OH}}\right)$ y comparamos también éstos (*OIFK* y *OHGJ*), y en este caso sólo habla de éstos (*DA* y *CB*), que son los paralelos entre las secantes. No nos habla de éstos (*KA* y *JB*).

Figura 9. Reproducción de lo presentado en el pizarrón



Fuente: elaboración propia.

Lo que nos explica E6 respecto al programa es que, tal como está presentada la figura, no puede compararse el tamaño de los lados de las fotografías. Recordemos que todo comenzó hablando de la ampliación de fotografías, entonces, los segmentos que él señala, que nosotros hemos denominado $\overline{KA}$ y $\overline{JB}$ son los que deben compararse respecto a los segmentos $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, para garantizar que las fotos (los rectángulos) son semejantes.

E2: Y sí son proporcionales… sí va a existir proporcional, con respecto a la secante, si yo me olvido del resto [recorre el eje hasta el punto E]… éste [$\overline{ED}$] en relación a éste [$\overline{EC}$] es proporcional a éste [$\overline{DA}$] en relación a éste [$\overline{CB}$]. Y eso es lo que maneja el teorema de Thales, lo estamos partiendo de aquí [señala el punto E], no desde atrás. No como rectángulo, sino como los triángulos rectángulos que se forman entre las secantes.

Rebeca: Entonces…

E7: Entonces estaría mal lo del plan de clase, ¿no? Porque está tomando el rectángulo. Aun así, está mal ejemplificado en la clase porque está manejando rectángulos; si quería usar el teorema de Thales tendrían que haber sido paralelas, pero si ya querían que fueran semejantes tendrían que haber partido del (0,0), para poder usar los triángulos y que pudiera haber proporcionalidad.

Rebeca: Entonces, éste es el análisis que se tenía que hacer en la figura.

E2 explica por qué sí son proporcionales los triángulos rectángulos, aunque esté fuera del (0,0), ya que compara sólo los segmentos que forman los triángulos. E7 toma la palabra para asegurar que, aunque se cambie de lugar "el eje *y*", el plan de clases tiene un error conceptual, ya que la tarea plantea la comparación de los segmentos de los rectángulos y no de los triángulos únicamente, y asegura que la recta debería haber pasado por el origen para hablar de la proporcionalidad entre los lados de la figura. De esta manera, Rebeca da por terminada la reflexión sobre la tarea planteada.

A.3. Síntesis analítica del acontecimiento A

Para analizar la tarea presentada en el plan de clases fue indispensable no olvidar el hecho de que se estaba trabajando con la ampliación de una fotografía, pues esa *contextualidad* fue la que garantizó pensar en los lados homólogos de los rectángulos y solicitar indiscutiblemente que la representación gráfica de la función fuera una recta que pasara por el origen, pues de otra manera las comparaciones e igualaciones no conservarían el invariante. Con esta tarea, contextualizada, se da una significación a la necesidad de que la representación gráfica de la función proporcional pase por el origen: así, la razón entre los pares de lados homólogos se mantiene constante, es decir, la razón de los incrementos es constante. La *resignificación* de la tarea en un contexto gráfico permite la construcción de la noción de incrementos y de la razón de estos incrementos. Cuando se dice "construcción" no significa que sea la primera vez que ellos abordan el tema, sino que es un argumento que surge a partir de las propias acciones de *relacionar, comparar, construir un invariante* e *igualar*, lo que demarca, a su vez, la relación sustentada en la *funcionalidad* en un contexto matemático formal. Esta funcionalidad permite pasar de ver la diferencia de estados de cada variable a ver la razón de esas diferencias, es decir, dentro del contexto matemático, pasar de ver la variación de la variable a ver la variación de la relación.

En este episodio se trabajó la construcción de la razón de las diferencias. Podemos postular, ya que ésta es una de las grandes dificultades del aprendizaje de la noción de derivada como variación en el cálculo, que un aprendizaje de este estilo puede contribuir al entendimiento del pensamiento variacional: la construcción de la pendiente como razón de las diferencias permitirá posteriormente una fluencia mayor al hablar de la razón de las primeras, segundas, terceras… diferencias.

El rol del profesor en el aula, si bien puede provocar discusiones mediante el planteamiento de preguntas, también debe tener la habilidad de comprender lo que sus estudiantes están construyendo. En la interacción presentada, Rebeca tiene reducidas intervenciones en cantidad, sin embargo, son intervenciones estratégicas que dan orden a las construcciones de los estudiantes (profesores). La habilidad de enseñar, para nosotros, no tiene que ver únicamente con lo que —ni con el cómo— un profesor vaya a exponer, sino con lo que un profesor permita construir y discutir, a la vez que entender de dicha discusión.

Como pudo observarse en las interacciones, tanto Rebeca como Óscar son parte de la problematización y, en particular en este episodio, es Rebeca quien lleva el control y promueve las interacciones. La autonomía es evidenciada dado que el trabajo promovido por Rebeca dista de las confusiones ya evidenciadas entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo (Hart, 1998; Lamon, 1999; Lesh *et al*., 1988); a partir del análisis y problematización de una propuesta de clase se genera la significación de la diferencia. Lo sintetizamos de la siguiente manera: podemos asegurar que la constante de proporcionalidad no es la pendiente de la recta ni la razón de cambio; la constante de proporcionalidad es la relación invariante entre dos magnitudes que, al momento de graficarla en un plano cartesiano, coincide con el valor de la pendiente, y vista desde un pensamiento variacional, coincide con la razón de cambio. Es decir, si definimos los conceptos matemáticos mediante su uso y su funcionalidad, las diferencias son indiscutibles.

La propuesta de intervención luego de la problematización de la matemática escolar

Exponer las fortalezas de los profesores en este artículo, significará mostrar las actitudes de transformación en cuanto a su relación con el conocimiento matemático, o bien, la innovación en situaciones de aprendizaje en donde se pongan en el centro las acciones del estudiante. Elegir un contexto situacional que propicie la construcción de un conocimiento específico que sea acorde a los estudiantes con quienes se está trabajando, que reconozca el espacio natural de construcción de conocimiento y la realidad del que aprende, serán características básicas de las propuestas que presentamos a continuación.

La propuesta de Rebeca: los colores

Durante la maestría le dieron el cargo de profesora de artes. Al finalizar la maestría articuló el trabajo realizado durante el seminario de desarrollo del pensamiento proporcional con el arte.

Por iniciativa propia, propuso abordar el círculo cromático desde una mirada matemática: mezclando colores primarios, con razones diferentes, propuso formar los colores secundarios. Luego, a partir de las mezclas con el mismo color, trabajaría con la comparación entre las razones numéricas, correlacionando que los colores iguales tendrían razones equivalentes.

En esta propuesta, Rebeca había sistematizado la noción de *lo proporcional* como aquella relación adecuada entre magnitudes que mantengan un invariante, en este caso, el color, para que posteriormente se estudien los elementos característicos, tanto cualitativos como cuantitativos. De la acción de formar colores, pasó al análisis de los objetos matemáticos: la razón, proporciones y la constante de proporcionalidad.

Logró fundamentar teóricamente un diseño de intervención en cuanto a la manera en la que promueve la construcción de la noción de la proporcionalidad a través de las prácticas en la práctica de referencia del arte.

Fotos de la interacción con profesores y profesoras de la segunda generación de MEMES, en la sesión donde Rebeca puso en práctica su diseño

Reflexiones finales

El crecimiento profesional docente autónomo como parte de la práctica ubica a éste en en un rol activo. El ejemplo de Rebeca, reportado en este artículo, marca una iniciativa de transformación de su práctica en la cual incorpora los conocimientos y habilidades personales a la situación en la cual se encontraba: fusionar las matemáticas con el arte respecto a los colores primarios, secundarios y las proporciones. Otros ejemplos de las investigaciones realizadas por los profesores de la MEMES-ENSFO podrán consultarse en este mismo número de *Perfiles Educativos* a cargo de Óscar Cervantes y Adolfo Acevedo. Asimismo, otros colegas también desarrollaron sus propuestas de intervención: entre ellas está el caso del profesor Rigoberto Díaz, quien trabajó con la unidad de medida de la jícara para construir la idea de volumen y capacidad. Pronto realizará su presentación de examen. O bien, el caso de la profesora Isabel Sánchez, quien fundamentó teóricamente un diseño sobre la construcción de un papalote que ella misma trabajaba en sus clases; durante los cursos, mencionó, evidenciaba y explicitaba el pensamiento trigonométrico y proporcional que se ponía en juego en dicha construcción. Así, cada profesor/profesora pensó, inventó y plasmó en sus aulas sus ideas. Algunos de ellos, pocos, han escrito sus logros para convertirlos en tesis. Algunos de ellos, la mayoría, han transformado su quehacer. ¿Cómo lo sabemos? Porque continuamos en contacto, dado que hoy podemos decir que somos parte de la comunidad de matemáticos educativos.

El acompañamiento posterior al trabajo colectivo resulta indispensable. Las y los profesores con los que se trabaja a diario reclaman que los procesos de desarrollo profesional docente precisan de un trabajo continuo, permanente, cuya retroalimentación marque un rumbo.

Referencias

Bacqué, Marie-Hélène y Carole Biewener (2015), *El empoderamiento. Una acción progresiva que ha revolucionado la política y la sociedad*, Buenos Aires, Gedisa.

Buendía, Gabriela (2010), "Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 13, núm. 4, pp. 129-158.

Caballero, Mario (2012), *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cabrera, Luis (2009), *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato,* Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cabrera, Luis (2014), *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. Un estudio de caso*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, Ricardo (1990), *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Simbiosis y predicción entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo analítico"*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.

Chevallard, Yves (1999), "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

D´Amore, Bruno, Martha Fandiño, Maura Iori y Maurizio Matteuzzi (2015), "Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la 'paradoja de Duval'", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 18, núm. 2, pp. 177-212.

Ferrari, Marcela y Rosa María Farfán (2010), "Una socioepistemología de lo logarítmico", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 13, núm. 4, pp. 53-68.

Hart, Kathleen (1988), "Ratio and Proportion", en James Hiebert y Merlyn Behr (eds.), *Number, Concepts and Operations in the Middle Grades,* Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 198-219.

Lamon, Susan (1999), "Reasoning Proportionally", en Susan Lamon (ed.), *Teaching Fractions and Rations for Understanding*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp. 223-238.

Lee, Ai Noi y Youyan Nie (2014), "Understanding Teacher Empowerment: Teachers' perceptions of principal's and immediate supervisor's empowering behaviours, psychological empowerment and work-related outcomes", *Teaching and Teacher Education*, vol. 41, pp. 67-79.

Lesh, Richard, Thomas Post y Merlyn Behr (1988), "Proportional Reasoning", en James Hiebert y Merlyn Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 93-118.

Lezama, Javier y Elizabeth Mariscal (2008), "Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica", en Patricia Lestón (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa XXI*, México, Colegio Mexicano de Matemática Educativa/Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 889-900.

Llinares, Salvador (2013), "El desarrollo de la competencia docente 'mirar profesionalmente' la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas", *Educar em Revista,* núm. 50, pp. 117-133.

Montiel, Gisela (2009), "Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 13, núm. 4-I, pp. 69-84.

Montiel, Gisela (2011), *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*, México, Díaz de Santos.

Pajares, M. Frank (1992), "Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a messy construct", *Review of Educational Research*, vol. 62, núm. 3, pp. 307-332.

Pochulu, Marcel y Mabel Rodríguez (comp.) (2012), *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos,* Los Polvorines, Universidad de Villa María y Universidad Nacional de Villa María.

Ponte, João Pedro (1998), "Da formação ao desenvolvimento profissional", en *Actas do ProfMat 98*, Lisboa, APM, pp. 27-44.

Ponte, João Pedro, Joana Mata-Pereira e Marisa Quaresma (2013), "Ações do professor na condução de discussões matemáticas", *Quadrante*, vol. 22, núm. 2, pp. 55-81.

Pozo, Juan Ignacio (2012), "Las concepciones de los profesores sobre el aprendizaje", *5° Congreso Nacional de Educación. Antología,* tomo III, México, Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación-Editorial del Magisterio "Benito Juárez".

Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 48, pp. 360-382.

Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (en prensa), "Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber matemático en una transformación educativa?", *Revista de Ciencias de la Educación*.

Reyes-Gasperini, Daniela, Ricardo Cantoral y Gisela Montiel (2014), "Cuando una crece, la otra decrece… ¿proporcionalidad inversa o directa?", *Premisa*, vol. 16, núm. 62, pp. 3-15.

Soto, Daniela (2010), *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Soto, Daniela (2015), *La dialéctica exclusión - inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Soto, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 59, pp. 1525-1544.

La construcción social de un lenguaje simbólico desde las prácticas

Óscar Alejandro Cervantes Reyes*
Daniela Reyes-Gasperini**

Presentamos los resultados de una investigación cualitativa-interpretativa de corte sociepistemológico, que atiende la problemática de la enseñanza del lenguaje algebraico en educación secundaria, donde prevalecen "los problemas tipo" y la "medida desconocida" como únicas vías de enseñanza, que llevaron a un simbolismo carente de sentido y significado. La investigación centra su interés en el estudio de las prácticas asociadas a la construcción del conocimiento matemático, asumiendo que anteceden y acompañan dicha construcción. Recurre a la construcción de una unidad de análisis socioepistémica y al estudio de caso en el arte de la albañilería de una comunidad mixteca del estado de Oaxaca. Los resultados muestran una ruta viva, en uso y funcional, donde se usa, construye y significa el lenguaje algebraico en el marco de una práctica de referencia, identificándose las fases primarias del lenguaje algebraico y los diferentes razonamientos proporcionales en una suerte de relación simbiótica, como soporte principal.

Palabras clave

Investigación educativa
Enseñanza de las matemáticas
Álgebra
Construcción social
Educación básica

* Profesor-investigador de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca (México). Maestro en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria. Línea de investigación: construcción social del conocimiento matemático. CE: yuza_cero7@hotmail.com.

** Coordinadora académica del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas - PIDPDM (México). Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Línea de investigación: socioepistemología y empoderamiento docente. Publicaciones recientes: (2016), "Funcionalidad de los algoritmos en el desarrollo del pensamiento matemático", *Revista Novedades Educativas*, núm. 305, pp. 18-24; (2015, en coautoría con R. Cantoral y G. Montiel), "Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica", *Avances de Investigación en Educación Matemática*, núm. 8, pp. 9-28. CE: dreyes@cinvestav.mx

Introducción

Diversas investigaciones actuales abordan la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Butto y Rojano, 2004; Filloy *et al.*, 2008; González, 2012; Filloy y Kieran, 1989; Malisani, 1999; Mejía y Barrios, 2008; Palarea, 1999; Ruiz *et al.*, 2015; Ursini y Trigueros 2006; Usiskin, 1999), trabajos que, si bien son adecuados para localizar los obstáculos didácticos, epistemológicos y cognitivos, no han sido suficientes, ya que aún persiste la problemática. Esta situación, aunada a evidencias empíricas del trabajo en el aula, tales como el alto índice de reprobación, dio pie a la presente investigación. En este sentido, resulta innegable reconocer las limitaciones de nuestra perspectiva inicial, centrada en los objetos matemáticos, en la "aprobación", en el cómo enseñar, sin problematizar el conocimiento, es decir, soslayando aspectos cognitivos, epistemológicos y socioculturales.

El trabajo desarrollado en los seminarios de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) con investigadores del Área Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV-IPN), dio lugar a un cambio en nuestra relación con el conocimiento matemático, lo que permitió una visión más amplia de la problemática. Esto nos llevó a una revisión del estado del arte del objeto de estudio, donde identificamos, entre otros aspectos: 1) que la enseñanza y aprendizaje del lenguaje algebraico requiere de otros lenguajes, como el natural o el geométrico (Butto y Rojano, 2004; Malisani, 1999; Palarea, 1999; González, 2012; Filloy y Kieran, 1989); 2) reconocimos que las dos rutas que se desarrollan en los libros de texto del sistema educativo mexicano para abordar el lenguaje algebraico: el planteamiento de "problemas tipo" y "la medida desconocida", lo presentan como un conocimiento acabado, preexistente, atomizado, en contextos ficticios, donde se excluye al alumno de la construcción del conocimiento. En términos de Soto y Cantoral (2014), esta situación se reconoce como consecuencia del *discurso matemático escolar* (dME), entendido éste como un sistema de razón que produce violencia simbólica, y que norma la dirección del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas hacia la imposición de un solo tipo de argumentación, de significados y de procedimientos asociados al saber matemático escolar. Esto excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción del conocimiento matemático, ya que sólo se "entrega" el producto final.

Así mismo, la falta de marcos de referencia influye en la significación y resignificación del conocimiento (Cordero, 2001; Montiel, 2005; Soto, 2010); en el aula, por acción del dME olvidamos que la matemática responde a otras asignaturas, y que es ahí donde se encuentra la base de significados naturales del conocimiento matemático; esto nos ha llevado a la enseñanza de una "matemática sin sentido", desconectada de la realidad del aprendiz, indiferente a los saberes previos y a los procesos cognitivos del alumno, desvinculada de las otras asignaturas del currículo escolar. Así, el estudiante se encuentra con una matemática escolar con significados artificiales que le resulta ajena.

De forma cotidiana en el aula, el docente normado por el dME comunica verdades preexistentes, carentes de significado o con significados artificiales, ajenos a la naturaleza intrínseca de la Matemática; y esto porque, desde nuestra visión, ésta toma sentido y significado a partir de prácticas que no se limitan a la disciplina misma, sino que pertenecen a un universo sociocultural mayor. Es decir, asumimos que "la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y otras prácticas de referencia en donde la Matemática adquiere sentido y significación" (Buendía, 2004: 5).

Por lo anterior, las rutas del lenguaje algebraico plasmadas en los libros de texto plantean una mirada parcial de la estructura del saber, ya que ignoran el contexto sociocultural de los alumnos, así como la epistemología del lenguaje algebraico; dado su carácter hegemónico, imponen situaciones que no permiten que el alumno sea partícipe de la construcción del aprendizaje.

Según Cervantes (2015), las dos rutas mencionadas anteriormente ("problemas tipo" y "la medida desconocida") se consideran trayectos que giran en torno a los objetos matemáticos; a partir de éstas, el lenguaje algebraico se muestra ante los alumnos como "un conjunto de reglas", como "un conocimiento terminado y lineal" que impone objetos preexistentes, que excluye al aprendiz, lo limita, coarta la posibilidad de nuevas hipótesis y, por lo tanto, le niega la oportunidad de hacer predicciones, de inferir, de ser partícipe de la construcción del conocimiento matemático, y de transformar las situaciones que hacen emerger los significados naturales del saber en cuestión. Ambas rutas tienen una visión de carácter utilitario del conocimiento; no conciben la matemática como resultado de la actividad humana; se la exhibe desde una perspectiva simplista, como "una regla útil para resolver determinados problemas" en el aula, esto es, centra la atención en objetos y procesos matemáticos, y en el tipo de problemas que resuelve. De aquí que el conocimiento no tome un carácter funcional, y que aparezca excluido de la visión de la construcción social del conocimiento matemático (Soto y Cantoral, 2014).

El objetivo principal de nuestra investigación es encontrar una ruta en el plano de nuestra realidad que permita la construcción de un lenguaje simbólico cercano a la noción de lenguaje algebraico. Una ruta donde, de forma natural, se ponga en uso dicho conocimiento. Asumimos que, antes de ser partícipes del simbolismo del lenguaje algebraico propio del dME, la noción de lenguaje algebraico es puesta en juego, a través de sus significados, en alguna práctica socialmente compartida asociada a la naturaleza intrínseca de este saber. En este sentido, nos interesamos en el estudio de la albañilería, asumiéndola como una práctica socialmente compartida; buscamos analizar las dinámicas del saber, la forma en la que se aprende y se construyen tanto edificaciones como conocimiento en uso, a partir de la trasmisión por vía oral: de maestro albañil a peón (que también, de acuerdo a su avance o aprendizaje, se le llama peón o "media cuchara"). Estos conocimientos van desde la forma de sujetar una herramienta y la proporción de materiales para preparar la mezcla, hasta la elaboración de presupuestos.

Desde nuestra óptica, enmarcada en la teoría socioepistemológica, consideramos a las prácticas sociales como fuentes del saber, que dotan de razón y sentido al conocimiento. Por lo anterior, en nuestra investigación nos planteamos lo siguiente:

- Identificar al menos una práctica socialmente compartida que, a través de su modelación, permita construir un lenguaje simbólico, cercano a la noción de lenguaje algebraico.
- Encontrar una argumentación alternativa a las rutas vigentes en los libros de texto actuales, que atraviese la realidad del alumno, donde sea partícipe activo de la construcción del conocimiento; un conocimiento en uso, con sentido y significado.

Marco teórico

La teoría socioepistemológica de la matemática educativa establece un método de acercamiento a las problemáticas que surgen dentro y alrededor de los fenómenos concernientes a la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Postula la necesidad de un examen minucioso del saber, amplio y sistémico, que considere las múltiples relaciones del triángulo didáctico, así como las restricciones institucionales pedagógicas. Atiende las múltiples dimensiones del saber y considera, también, las restricciones específicas del saber matemático.

Desde la teoría socioepistemológica (Cantoral, 2013) hemos problematizado el lenguaje algebraico a través de una unidad de análisis socioepistémica (UASE) concebida como una estructura teórica con base en el análisis sistémico de las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y social del saber matemático en cuestión (Reyes-Gasperini, 2011; Reyes-Gasperini y Cantoral, en prensa; Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014).

La *dimensión social* permite estudiar a los saberes matemáticos identificando la dimensión funcional, situacional e histórica, basada en la praxis, que está al nivel de la actividad y es soslayada y desdibujada en la práctica por el discurso matemático escolar (dME). La dimensión social, aunada a la *dimensión epistemológica*, que estudia la naturaleza del saber, reconoce a la matemática como parte de una cultura producto de la actividad humana.

Asimismo, bajo la mirada socioepistemológica se concibe que los conocimientos se dotan de significados a través de su uso y su funcionalidad; por tanto, se plantea la necesidad de que docentes y estudiantes, aunque inmersos en un sistema educativo, se relacionen con el conocimiento matemático de una manera más activa, con la intención de que construyan ideas fundamentales sobre dicho conocimiento, que vayan más allá de las abstracciones, procedimientos y el aprendizaje propios de su aplicación; es decir, que comiencen a relacionarse con el saber matemático concibiéndolo como un conocimiento puesto en uso. Esto es, la significación que se construirá a partir de la actividad de relacionarse con el saber matemático, permitirá entender en profundidad aquellas nociones que las miradas platónicas consideran como “la matemática escolar”.

Para poder hacer este análisis, la *dimensión didáctica* del saber juega un papel importante, pues será a través del estudio de libros de texto, programas de estudio, notas e investigaciones, entre otros, que se investigará cómo se presenta el conocimiento matemático estudiado en el sistema didáctico. Conjuntamente con estos análisis, es a través del estudio de la *dimensión cognitiva* que se exploran los procesos de apropiación del saber matemático basado en el reconocimiento de que el paso del conocimiento al saber responde a procesos propios del desarrollo del pensamiento matemático.

Este enfoque se ubica al nivel de las prácticas, privilegia la práctica social como normativa de la actividad humana, busca entender “¿qué es lo que nos hace hacer lo hacemos?”. Se caracterizan fenómenos didácticos en un sentido amplio; para ello se utilizan diversos métodos que dependen del escenario contextual, como: el aula, comunidades profesionales, comunidades artesanas, albañiles, etc.

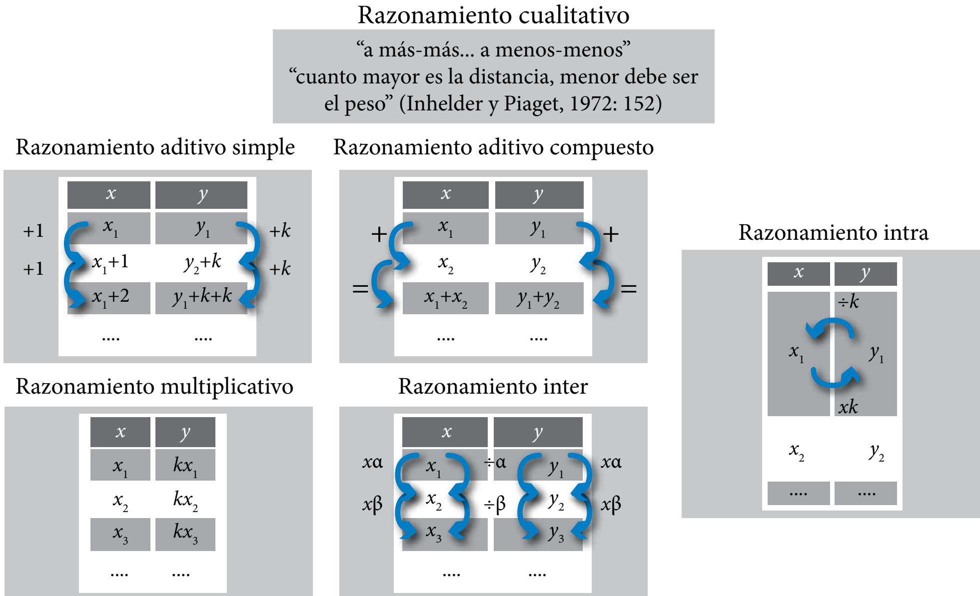
Por otra parte, de acuerdo con Malisani (1999), en la historia del álgebra tiene importancia tanto la historia de los conceptos como el sistema de símbolos utilizados; esta mirada de nuestro objeto de estudio, aunque parcial, no riñe con nuestra perspectiva teórica. Respecto a la historia de los conceptos, Nesselman (cit. por Malisani, 1999: 4) distingue tres fases en el desarrollo del lenguaje algebraico:

I. Fase retórica: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d. c.). Este periodo se caracteriza porque en él no se utilizaban símbolos, únicamente el lenguaje natural como soporte de expresión para resolver diferentes problemas individuales que en ocasiones implicaba la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado.
II. Fase sincopada: de Diofanto hasta fines del siglo XVI. En este periodo se empiezan a utilizar algunas abreviaturas para denotar incógnitas y relaciones de uso frecuente; sin embargo, los cálculos se hacían en lenguaje natural.
III. Fase simbólica: a partir de François Viète (1540-1603), quien de forma sistemática empezó a utilizar letras para denotar las cantidades (incógnitas, sus potencias y coeficientes genéricos) y signos para las operaciones; empleó el lenguaje simbólico tanto para procedimientos resolutivos como para demostrar reglas generales.

Por otro lado, retomaremos el esquema construido respecto a los razonamientos proporcionales para el desarrollo del pensamiento proporcional: estos razonamientos son el cualitativo, aditivo simple, aditivo compuesto, multiplicativo, inter e intra (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014).

De acuerdo con los autores, el *razonamiento cualitativo* precede a los modelos cuantitativos de pensamiento proporcional (que caracterizaremos más adelante) ya que el primero se refiere a una relación descriptiva entre dos magnitudes, mientras que los segundos refieren a relaciones

Figura 1. Razonamientos del pensamiento proporcional



Fuente: elaboración propia.

métricas. En este sentido, Piaget e Inhelder afirman que el niño alcanza el modelo cualitativo cuando se reconoce un elemento de compensación para mantener el "equilibrio", donde "un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente" (Piaget e Inhelder, 1977: 144), equilibrio que podemos enunciar como "a más-más… a menos-menos".

Razonamiento cualitativo

Es un razonamiento intuitivo. Su particularidad es que sólo es válido cuando la constante de proporcionalidad que está puesta en juego es positiva. Suele ser una receta nemotécnica durante la educación básica, antes de trabajar con números enteros, pues en el campo de los naturales no existe otra posibilidad.

- Ejemplo: tenemos que comprar pan. Cuanto *más* pan compre, *más* dinero voy a gastar.

Razonamiento aditivo simple

Dada la imagen del elemento unitario, responde al proceso de "por cada aumento unitario en el dominio, aumenta la cantidad de la constante en el codominio".

- Ejemplo: el kilo de pan cuesta 10 pesos. Si compro 1 kilo de pan, pago 10 pesos; si compro 2 (1+1) kilos de pan, pago 20 (10+10) pesos; si compro 3 (2+1) kilos de pan, pago 30 (20+10) pesos… si compro 8 (7+1) kilos de pan, pago 80 (70+10) pesos.

Razonamiento aditivo compuesto
La imagen de la suma de dos elementos del dominio es igual a la suma de las imágenes de cada uno de dichos elementos.

- Ejemplo: si 3 kilos de pan cuestan 30 pesos, y 5 kilos de pan cuestan 50 pesos, 8 (3+5) kilos de pan cuestan 80 (30+50) pesos.

Razonamiento multiplicativo
Dada la imagen del valor unitario, cualquier elemento del codominio será igual al producto de su correspondiente en el dominio por el valor unitario.

- Ejemplo: si por 1 kilo de pan pago 10 pesos, por 8 kilos de pan pago 80 (8×10) pesos.

Razonamiento inter
Los elementos del dominio y el codominio varían de la misma manera. Este razonamiento es el que suele conocerse como "al doble le toca el doble".

- Ejemplo: si por 2 kilos de pan pago 20 pesos, por 8 (2×4) kilos de pan, pago 80 (20×4) pesos.

Razonamiento intra
La razón entre el elemento del dominio y el elemento del codominio es siempre constante.

- Ejemplo: si pagué 80 pesos por 8 kilos de pan, entonces, el precio del kilo de pan es de 10 pesos ($80 \div 8 = 10$).

En este caso aparece una cantidad a partir de una unidad de medida llamada *precio,* que es un concepto en sí mismo.

Debe entenderse que la confección del *pensamiento proporcional* hasta el momento tiene sustentos cognitivos desde una perspectiva que podríamos denominar tradicional o clásica. Sin embargo, para la teoría socioepistemológica, "lo cognitivo" no sólo se reduce a un proceso del pensamiento a través de sus representaciones, sino que también estaremos hablando de las prácticas que tengan la capacidad de "hacer emerger" el significado y que podrán relacionarse con los razonamientos puramente cognitivos. Por tanto, la que para visiones tradicionales se centra en la evolución cognitiva y sus diferentes representaciones, para la socioepistemología será la evolución de los procesos de significancia constructivos mediante la práctica, su evolución pragmática: la significación mediante el uso. Entonces, dado que ya hemos caracterizado a nivel cognitivo tradicional el "modelo del pensamiento proporcional", ahora nos proponemos la búsqueda de las prácticas que permitan hacer emerger esa significación. Para ello, será necesario estudiar la construcción social del conocimiento matemático, y de este modo, hablaremos de *lo social.*

Retomamos los resultados expuestos anteriormente y los reorientamos hacia la búsqueda de un lenguaje simbólico cercano a la noción de lenguaje algebraico, bajo la siguiente hipótesis: en cada razonamiento de manera intrínseca emerge en uso un lenguaje pleno de significados, lenguaje que hace posible expresar la relación planteada en cada razonamiento:

Tabla 1. Lenguajes posibles que emergen en los diferentes modelos

Razonamientos del pensamiento proporcional	Lenguaje emergente cercano a la noción de lenguaje algebraico
Razonamiento cualitativo	Lenguaje retórico
Razonamiento aditivo simple	Lenguajes retórico y sincopado
Razonamiento aditivo compuesto	Lenguajes retórico y sincopado
Razonamiento multiplicativo	Lenguajes retórico, sincopado y simbólico

Fuente: Cervantes, 2015.

Lo anterior, bajo la consideración de que la proporcionalidad es un contenido transversal de la educación básica, en donde la transversalidad del conocimiento es usada como herramienta vital de la construcción integral del conocimiento matemático.

El marco teórico presentado nos brindará las herramientas para realizar el análisis correspondiente a la hora de buscar las prácticas asociadas al conocimiento matemático. Analizaremos la razón de ser "del porqué hacen lo que hacen los albañiles" (¿por qué accionan o trabajan de esa manera?), para, en el ejercicio de las mismas prácticas, reconocer el conocimiento en uso, el saber emergente. Particularmente, hablamos de un saber popular que es válido porque es el resultado de años de prácticas de un cierto grupo social, además de ser funcional. Saber que en un momento fueron nociones, procedimientos, propiedades que fueron evolucionando hasta formas de saber socialmente establecidas.

Por último, una característica de este enfoque, en el marco de la dimensión social, es que se pretende intervenir en el sistema didáctico: no es contemplativo, porque, de acuerdo con Cantoral (2013), debido a la naturaleza de los conceptos matemáticos, éstos no sólo viven en el aula, sino que trascienden más allá del uso escolar.

Metodología

El estudio está enmarcado en la línea cualitativa-interpretativa, cuyo método de investigación es el estudio de caso; al ser transparadigmático y transdisciplinario, este método puede ser utilizado desde cualquier paradigma de investigación (Durán, 2012).

En nuestro estudio nos apoyamos en la propuesta de Reyes y Hernández (2008):

- fase documental: en la que se considera una revisión bibliográfica a fin de lograr una aproximación teórica y la ubicación de las diferentes propuestas que atienden nuestro objeto de estudio; lo anterior, sin desatender los fundamentos teóricos del investigador, en nuestro caso desde la socioepistemología.
- fase referencial empírica: consiste en la descripción del caso; en ésta se desarrolla el fenómeno de interés, considerando las diferentes perspectivas de los sujetos actores involucrados.
- fase interpretativa: donde contrastaremos los hallazgos empíricos con los supuestos teóricos, a fin de detectar correspondencias y establecer posibles relaciones en los aspectos de interés desde nuestra perspectiva teórica.

Estudiaremos nuestro fenómeno: la construcción social del lenguaje algebraico desde las prácticas, a partir del análisis de las interacciones y el quehacer de un albañil de la comunidad mixteca en el estado de Oaxaca, a quien, por motivos de confiabilidad, sólo le llamaremos Rosendo.

Participante en la investigación

Rosendo fue escogido por consideraciones pragmáticas, así como por su gran sentido de colaboración. Padre de familia, persona sencilla, de sonrisa franca y gesto sincero, quien presto responde a cualquier solicitud respecto a su trabajo; ronda los 70 años. En las entrevistas comentó que en los últimos años ha escaseado el trabajo: "algunos ya no me hablan para trabajar, porque piensan que ya no trabajo", razón por lo que se emplea esporádicamente; de ahí su disponibilidad de tiempo.

Rosendo tiene alrededor de 47 años de experiencia en la construcción. Ha trabajado en diferentes tipos de edificaciones, desde casas habitación hasta grandes hoteles y hospitales; y ha realizado todo tipo de actividades, que van desde obra negra (cimientos, tabique, castillos, etcétera), hasta conocimientos más especializados como el pegado de loseta, azulejo, mármol, yeso, molduras, entre otras, y todo tipo de "detalles". Ha sido "su fuerte", como él mismo señala. Otra importante consideración es que el investigador que realizó la toma de datos también se desempeñó en ese oficio por poco más de 10 años, situación que favorece el estudio por el clima de confianza durante la interacción, las entrevistas, y las observaciones, ya que Rosendo lo considera como uno más de sus pares.

Durante seis días acompañamos a Rosendo, 32 horas reloj específicamente, en su trabajo, y el resto del tiempo en su hogar, donde la entrevista semiestructurada y la observación participante fueron los ejes centrales para la recogida de datos; ésta se complementó con las hojas de visita, grabaciones de audio y transcripción de las entrevistas realizadas. Estas evidencias, por su extensión, fueron organizadas en tres episodios para su análisis, proceso en el que se enfatizó la combinación de técnicas y de múltiples fuentes para obtener descripciones, análisis y conclusiones más convincentes a través de la triangulación de las mismas en un análisis exhaustivo.

Análisis

El álgebra, como todo lenguaje, emergió con ambigüedad y riqueza de significados, y al formalizarse quedó desprovista de ellos (Malisani, 1999), o con significados artificiales, ajenos a la naturaleza del saber y a nuestra realidad: un simbolismo carente de sentido y significado (Filloy y Kieran, 1989). Su aprendizaje requiere un cambio de pensamiento que permita ser consciente de sus procesos de significación; en este viraje deberán considerarse las limitaciones semánticas del lenguaje algebraico, la complejidad de su enseñanza y aprendizaje, así como de la necesidad de recurrir a otros lenguajes como el natural y el geométrico (Butto y Rojano, 2004; Filloy y Kieran, 1989; González, 2012; Malisani, 1999; Palarea, 1999).

A fin de favorecer el análisis de la información, ordenamos las interacciones en tres episodios que resultan ser bastante extensos, motivo por el cual seleccionaremos sólo algunos fragmentos, donde a criterio del investigador se muestra lo que se pretende evidenciar: la construcción del pensamiento proporcional y, al menos, una de las fases de desarrollo del lenguaje algebraico (Malisani, 1999).

> 1. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 11 de agosto de 2014).
>
> [95.] R: por botes de arena se guía uno más, porque en veces eh, eh… en botes de arena, porque ya sabes que le vas a poner un bulto de cal, esa es la medida se puede tomar ¿no?; eh, seis botes de arena y el de cal, ya en el cemento puede variar... Puede variar porque en una construcción vas a prevenir la humedad de... entonces en una parte le puedes poner ya revuelta tu mezcla. Puedes echar un poco más de cemento a una parte más baja por prevención de la humedad, pero la base, la base es el bulto de cal y los seis botes de arena, y el medio de cemento. Ya después como digo ¿no?, dependiendo del lugar que sea puede variar.

Es su práctica la que orienta el actuar de Rosendo cuando calcula el presupuesto de una obra: material y mano de obra; ya sea de manera formal o informal, en este último caso cuando se pretende dar una idea general de la obra sin que esto implique un acuerdo; sólo para que se tome como una referencia. En los presupuestos, proceso que Rosendo realiza casi de forma ritual (necesaria, mas no algorítmica) antes de hacer un trabajo, su conocimiento va más allá de operaciones aritméticas: estima, aproxima, realiza cálculo de áreas, volúmenes, conversiones de unidades, situaciones de conteo y un fuerte manejo de la noción del pensamiento proporcional en el que más adelante se abundará. La albañilería, en sus prácticas, encierra saberes milenarios que, con el uso reiterado en la comunidad de trabajadores de la construcción, instituyen actividades, procesos y relaciones; por ejemplo, determinan la cantidad de bultos a considerar por metro cúbico o el número de anillos por metro lineal en el armado de una trabe o castillo; sin desatender el uso, la disposición o las condiciones climáticas. Aquí se comienza a develar la albañilería como una potencial práctica de referencia.

Es importante señalar que las prácticas del albañil, a pesar de institucionalizarse, no dejan de estar sujetas a la funcionalidad o pertinencia, lo que determina, a su vez, su permanencia o cambio, en una suerte de readaptación de prácticas. Por ejemplo, la salida al mercado de una cal más cocida llevó a los albañiles a cambiar su práctica en el revoque pulido: dejaron de pudrir la cal con arena y agua para ahora quemar más la cal con su llana (herramienta parecida a la cuchara), como en el caso del pulido de una pared (acabado parecido al yeso pero con mayor resistencia, dado que utilizan cemento, cal y arena).

> 2. Interacciones (episodio 3, Rosendo, 26 de agosto de 2014).
>
> [102.] R: ¡ya, no!; ahorita es, si no es afinado es yeso, casi ya no, afinado otros; pero, así hacían. Ahorita te estoy hablando todavía de eso, de que se... en México fue en el 67; 67, 68 allá en México todavía lo hacían. Aquí con don Boni, en San Marcos también se hacía; pero, surgieron estas cales como la ésta que te digo, la Calusa.
>
> [103.] E: ¿y así más rápido?
>
> [104.] R: así más rápido; pero, por eso; de que cuando es un pulido se truena, aunque lo que... tienes que quemar mucho la cal. Quemar es de que le pasamos una pasada con llana y luego al rato ya que fraguó un poco, le pasamos y tiene que quedar brilloso el pulido, es eso.

Se reconoce una función normativa en la práctica. De acuerdo con Sierra, "…debido a un proceso de transferencia generacional del conocimiento. Asociado al proceso permanencia-cambio y al proceso de conservación institucional del conocimiento es como se considera un conocimiento institucionalizado y como se comprueba el estatus normativo de la práctica social" (Sierra, 2008: 71). En las interacciones, Rosendo hace referencia a los procesos de permanencia-cambio relacionados con el uso de la cal, en donde, sin que hubiese un acuerdo por escrito ante la nueva cal, los albañiles cambiaron sus prácticas, dejaron de pudrir la cal para trabajarla de forma inmediata; en el caso del pulido los obligó también a cambiar la forma de trabajar la cal, de tal forma que su práctica fuera funcional. Lo anterior contribuye al entendimiento de la consecución de saberes: al hacer un ajuste a sus prácticas, se las trasmite a su peón, a sus hijos o a otros albañiles. Un conocimiento en uso que pasa de una generación a otra, que se trasmite después de una readaptación o ajuste que le permite seguir siendo funcional. En este sentido reconocemos la naturaleza social del conocimiento a través de la reiteración intencional y compartida de prácticas, como resultado de una práctica de referencia: "la albañilería".

De acuerdo con Cantoral, "la práctica social no se filma, se infiere". Esta inferencia la entendemos como resultado de un estudio o investigación; en este sentido, buscamos entender "por qué hace lo que hace Rosendo"; "las causas del por qué lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, ¿en dónde?, y ¿por qué lo hace? ¿Y cómo se autoconcibe haciéndolo? Esto da lugar a las funciones de la práctica social" (Cantoral, 2013: 180-181). A partir de lo que se puede inferir de las prácticas socialmente compartidas que viven los albañiles, conjeturamos que existe una práctica social que norma dichas prácticas. Prueba de ello es la caracterización que haremos de las funciones normativa, identitaria, reflexiva y pragmática, aunque por cuestiones de espacio sólo retomaremos brevemente esta última.

El carácter activo de la práctica social se manifiesta a través de la función pragmática, la cual "permite orientar las acciones en la actividad humana, al adquirir la capacidad de producir intencionalidad e iteración de la actividad con la práctica hasta alcanzar la expertez o experiencia" (Cantoral, 2013: 181). Rosendo comenzó de peón y poco a poco fue mejorando, adquiriendo más saberes y perfeccionando los anteriores, proceso que resulta evidente a lo largo de los tres episodios:

> 3. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 11 de agosto de 2014).
>
> [361.] E: y eso ¿cómo se aprende? ¿Se lo dijeron o...?
>
> [362.] R: en la práctica, en el camino del trabajo ¡se aprende!, porque empezamos, en veces no tuvimos la oportunidad deee... de que nos dijera alguien, y este, o alguien nos dice; pero si no, uno mismo; ya sabes que de hecho ¡yaa desde peón!, ya vienes escuchando del maistro que dice "le di...", tá uno de peón y le dice el maistro, el albañil al colador o que a su peón: ¿cómo está la grava?, o lo ve el albañil "¡no, está delgada; échale más de grava porque está delgada, se parte!".

Durante el estudio, Rosendo señaló, una y otra vez, la importancia de la práctica como la forma de aprender y alcanzar la expertez.

Este estudio nos permitió reconocer la albañilería como una práctica de referencia que, a su vez, encierra diferentes prácticas socialmente compartidas, como el revoque de paredes, el pegado de tabique, el colado de lozas, la construcción de escaleras, etcétera. Éstas encierran, en forma anidada, diversas acciones, actividades y prácticas, normadas por una práctica social, es decir, identificamos un sistema anidado de prácticas, normado por aquello "que le hace hacer lo que hace" a Rosendo; aquello, que le hace buscar una especie de equilibrio funcional en su práctica.

Una vez caracterizada y evidenciada la práctica de referencia, es que nos proponemos estudiar cómo se construye conocimiento matemático en ella. En particular, buscamos la construcción de la noción de proporcionalidad en el oficio de la albañilería para luego comenzar la construcción de un lenguaje simbólico orientado a la noción del lenguaje algebraico. Sin embargo, al analizar las evidencias encontramos que la albañilería cumple el rol de práctica de referencia y, en este contexto, identificamos el lenguaje algebraico en su fase retórica puesto en uso, el cual se caracteriza por el uso del lenguaje natural como soporte de expresión para plantear, analizar y resolver diferentes problemas propios de su práctica (Malisani, 1999); es decir, no utiliza símbolos, como se muestra:

> 4. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014).
>
> [131.] R: ah, mira; un metro eh, mira ahorita vas a ver… un metro cúbico de concreto de la proporción de cuatro, de cuatro bultos.
>
> [132.] E: cuatro por cuatro.
>
> [133.] R: cuatro por cuatro a un cúbico; se tiene ya, como base ya calculado, que se lleva nueve botes, nueve bultos por metro cúbico de un concreto de losa.

En esta explicación Rosendo no recurre al uso de símbolos; los planteamientos y resoluciones los realiza en lenguaje natural, es decir, se sitúa en la fase retórica del lenguaje algebraico. Al analizar la interacción 3 identificamos dos relaciones proporcionales: "un metro cúbico de concreto de la proporción de cuatro, de cuatro bultos" y "nueve bultos por metro cúbico de un concreto de losa". La expresión "cuatro por cuatro" se refiere a la cantidad de botes de arena y grava por bulto de cemento, que tiene un significado específico en la práctica para Rosendo: la resistencia del concreto. Matemáticamente podemos reconocerla como una relación entre dos magnitudes, esto es, una razón proporcional, que a su vez se representa como: 4 : 4 o 4/4. De manera semejante, se identifica la segunda expresión como una razón proporcional, donde se relaciona la cantidad de bultos de cemento por metro cúbico, es decir que 9 bultos de cemento rinden un metro cúbico, que se representa como: 1 : 9, 9 : 1, 1/9 o 9/1. Desde la perspectiva socioepistemológica, importa resaltar que las relaciones que se simbolizan como 4 : 4 y 9 : 1 tienen sentido y significado para Rosendo, aun siendo sólo retórica, porque le son funcionales en su práctica, en su contexto.

Por otra parte, en el lenguaje algebraico en uso por parte de Rosendo, a través de expresiones de su propia práctica identificamos uno a uno los diferentes razonamientos del pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014).

> 5. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014).
>
> [189.] E: digamos un tamaño normal, si ese es, si es un cuarto; ¿y si fueran dos cuartos?

[190.] R: dos cuartos; son 18 ¡si llega ves, si llega!, son dos cuartos: 18, 36… ¿con su baño?... 45 metros… ¡45 metros! Eso es lo que vas a ver…

[191.] E: ¿y si fueran tre…?; ahí, digamos ya van considerando conforme va creciendo, no sólo son los cuartos… sino que, ya planeado es de qué va a llevar…

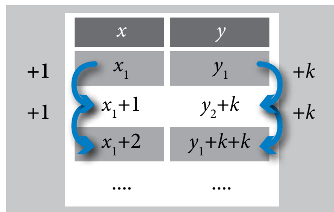
El análisis nos lleva a identificar el *razonamiento aditivo simple*, para lo cual realizamos el siguiente esquema:

Figura 2. Análisis y contraste del razonamiento aditivo simple

+1

Número de cuartos	m^2 de losa
1	18
2	36
3	52

+18



Fuente: elaboración propia.

En la Fig. 2 se evidencia, a través de la modelación, el pensamiento desarrollado por Rosendo, quien recurre a estrategias aditivas: incrementa de 18 en 18 (+*k*) para calcular los metros cuadrados de losa, y de uno en uno el número de cuartos. Cabe señalar que dichos cálculos están sujetos a un cierto margen de error, en virtud de que son realizados mentalmente. Este hecho da muestra de la evolución de lo proporcional, como relación adecuada, sobre la proporcionalidad como cálculo exacto, en las prácticas donde el saber popular está puesto en juego (Reyes-Gasperini, 2016).

De la misma forma, identificamos los *razonamientos aditivo compuesto* e *inter* de pensamiento proporcional en la siguiente interacción.

6. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014).

[275.] E: y ¿18 metros cuadrados, que casi está cerca de 20?

[276.] R: igualmente, porque estaba yo sacando cuentas: es un metro cúbico, uno… con… ochenta centímetros algo así…

[284.] R: le vas a hacer… no, ya no serían este… son, si fueran dos metros serían 18; pero no, ahí se va llevar este… 15 bultos…

[295.] E: ¿por qué dice usted?

[296.] R: porque estoy sumando el, eh… estoy sumando los dos metros cúbicos.

[297.] E: ajá.

[298.] R: así, mentalmente… porque dije nueve, nueve bultos de ese… del metro cúbico ese; pero, como del otro son prácticamente son tres cuartos, pero ya no; entonces ya le quitamos a… los dos bultos a… ya le quito al, en lugar de que sea metro cúbico entero el otro, pues yo saco primero que fuera, como si fueran los dos…

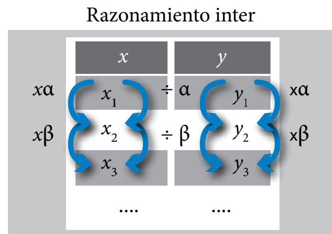
Modelamos la situación anterior a través de la Fig. 3, a fin de estructurar la intervención y hacer el análisis:

Figura 3. Análisis del razonamiento inter

$\frac{3}{4}$ x

m^3 de losa	bultos
1	9
2	18
$\frac{3}{4}$	6
$1\frac{3}{4}$	15

x $\frac{3}{4}$



Fuente: elaboración propia.

En un primer momento se aprecia el cálculo que hace Rosendo para encontrar el número de bultos que corresponde a 3/4 de un m^3; donde asume que a 3/4m^3 de losa le corresponden 3/4 de los 9 bultos, es decir, 3/4 es el escalar β por el que multiplica ambas variables. Además, realiza un ajuste de los 6.75 bultos a seis, por dos razones: primera, en las tiendas de materiales no venden 0.75 bultos y, segunda, en repetidas ocasiones durante las interacciones Rosendo señala que de cada m^3 le sobra medio bulto aproximadamente. De acuerdo con Carretero (1989: 86) en esta situación se exploran "dos tipos de 'estructuras multiplicativas' en situaciones problemas que implican una o varias operaciones de multiplicación y/o división".

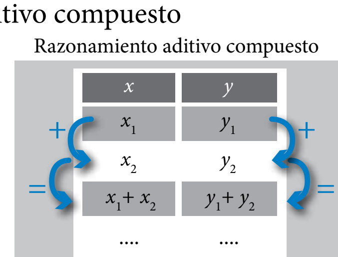
Al mismo tiempo, en esta situación reconocimos el *razonamiento aditivo compuesto*. Rosendo plantea una relación de proporcionalidad directa al tener dos razones identificadas, y calcula una tercera mediante la suma. Apoyándonos en los funcionales de Cauchy (Roa, 2010) esto puede expresarse como $f(x + y) = f(x) + f(y)$, o bien, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes, como se muestra a continuación:

Figura 4. Análisis del razonamiento aditivo compuesto

+

m^3 de losa	bultos
1	9
2	18
$\frac{3}{4}$	6
$1\frac{3}{4}$	15

+



Fuente: elaboración propia.

En la siguiente interacción se reconoce, asimismo, el *razonamiento multiplicativo*:

7. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014).

[258.] R: ¿sí?, no, no este… hasta el final; son nueve bultos: cada metro, cada metro cúbico de ahí de los nueve, te va a sobrar como medio bulto… de cemento; y eso ya por experiencia me ha tocado, ya lo he hecho. Porque he pedido los nueve, porque era más fácil sacar, eh… como son 50 metros serían 5 metros cúbicos; por eso saqué de los 45…

[259.] E: ¿cinco metros cúbicos?

[260.] R: ajá, cinco metros cúbicos ¿por nueve?, ¿serían que… los 45?

[261.] E: 45.

[262.] R: 45, pero no se lleva los 45; se lleva un poquito menos, porque cada…

Realizamos el siguiente esquema para el análisis:

Figura 5. Análisis del razonamiento multiplicativo

x 9

m^3 de losa	bultos
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45

Razonamiento multiplicativo

x	y
x_1	kx_1
x_2	kx_2
x_3	kx_3
....	....

Fuente: elaboración propia.

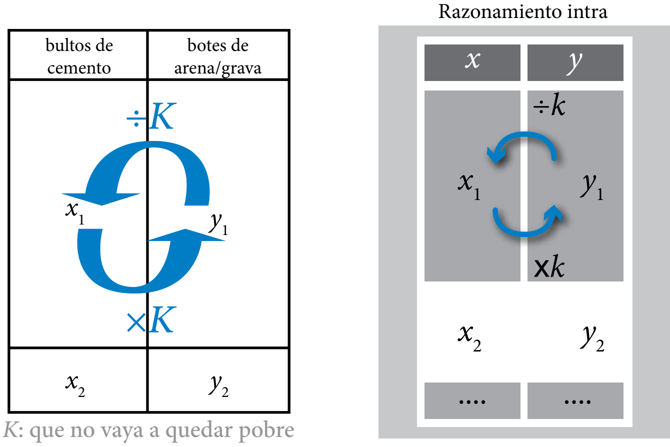
De lo expresado se puede sintetizar la relación de la forma $n \to 9n$, $n \in Z$, que corresponde al *razonamiento multiplicativo.* Por último, de acuerdo a los diferentes razonamientos, sólo falta el *razonamiento intra*, identificado en la siguiente interacción:

8. Interacciones (episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014).

[430.] R: si ya tiene que… si, ya se da cuenta él; ya más o menos. La recomendación que dices tú, que te estoy dando ehh… ya lo platicamos, él ya lo sabe; porque ya lo vio con nosotros, lo único que le vas a decir ¡que no vaya a quedar muy pobre!, si le dices ya así: sin, sin números "¡no vaya a quedar muy pobre, ehhh!", "o sea, ¡regular!"; entonces dice, si él ya acostumbraba a echarle cinco o seis, no pus… ahí entonces ya se va a calcular cuántos bultos; porque va a colar este cuarto o va a colar un bañito, ya va a hacer como decimos ¿no? ¡Que no quede muy pobre!, o ves la revoltura ya que, ya la hizo;

"¿cuántos bultos hiciste?", "pus, ¡tres!". "Oye, ¿no está muy pobre?". "Maistro, es que le eché… tanto". "Pues, échale… ¿son, cuántos botes? Échale otros dos botes, ¿o qué?". Pero ya a cuenta de lo que él te dijo cuanto que le echó; así es…

Figura 6. Análisis del razonamiento intra



K: que no vaya a quedar pobre

Fuente: elaboración propia

Es precisamente la expresión "¡no vaya a quedar muy pobre, ehhh!", donde se establece una relación entre magnitudes heterogéneas (bultos de cemento y botes de arena/grava); esta expresión corresponde a la estructura del razonamiento multiplicativo funcional, señalado así por Carretero (1989), al que referiremos, de manera semejante a Lamon (1993), como *razonamiento intra*. Cabe señalar que, para Rosendo, esta razón va más allá de una relación aritmética, porque en ésta él considera diversos factores, como las características de los materiales, las condiciones físicas o la disposición de la obra. Es decir, aunque no se llega a la simbolización, la relación queda explícita en la textura de la mezcla, a pesar de su complejidad y medio de expresión, donde atiende factores específicos.

Reflexiones y conclusiones

Como resultado de la investigación identificamos la albañilería como una práctica de referencia que orienta las actividades del albañil en su cotidiano. Cuando Rosendo determina las cantidades de material a utilizar en la mezcla, proceso donde considera distintos factores como el propósito de la mezcla (para qué la va a utilizar, ya sea para revocar o para pegar tabique), las características de los materiales (grosor de la grava o de la arena o el estado del cemento) y el contexto (atendiendo las consideraciones del clima o la disposición del lugar donde se empleará la mezcla: amplio, reducido, con humedad o seco, de carga o normal, volado o no, etcétera), se evidencia el proceso de construcción del conocimiento y de su uso, es decir, su tránsito al saber, como el caso del pensamiento proporcional mostrado en el análisis.

En el marco de la práctica de referencia de la albañilería, como resultado de la investigación postulamos que la noción de proporcionalidad a través de los modelos identificados en uso, en una suerte de simbiosis con el lenguaje algebraico en su fase retórica, conforman una ruta alternativa a las dos rutas planteadas en los libros de texto. Las evidencias encontradas muestran que aun antes del simbolismo es posible que emerja el lenguaje algebraico con sentido y significados en un contexto determinado por una práctica de referencia específica.

Aunado a lo anterior, cabe señalar el paralelismo entre el desarrollo del lenguaje algebraico en la historia de la matemática y el lenguaje encontrado en la práctica de referencia de la albañilería de la mano del pensamiento proporcional (dos conocimientos puestos en uso), que serán el punto de partida para continuar el desarrollo del lenguaje algebraico. Nótese que encontramos una ruta ya trazada, un camino funcional hacia el lenguaje algebraico simbólico inmerso en una práctica de referencia. No planteamos una nueva ruta, sino que la ruta ya está trazada, y responde a la naturaleza del saber. Sólo falta continuar o seguir la ruta identificada en la albañilería, una ruta natural que continuaremos bajo la consideración de que si las fases de desarrollo del lenguaje algebraico se sucedieron en la historia de la humanidad, es posible plantearlo bajo el mismo esquema en el individuo.

En comparación con el denominado *programa funcionalista* (centrado en la *estructura sintáctica* del lenguaje algebraico, que si bien resulta adecuado para localizar los obstáculos didácticos que se han documentado en el aprendizaje del lenguaje algebraico, no ha resuelto plenamente el problema del aprendizaje del álgebra, como muestran las evaluaciones internacionales), el aporte central de esta investigación es la propuesta de una estrategia centrada en las *prácticas situadas*. Prácticas socialmente compartidas que atraviesan la realidad de quien aprende, donde se asume el saber como un conocimiento en uso, y se toma por base en los modelos de *pensamiento proporcional* y *desarrollo del lenguaje algebraico*. A diferencia del programa funcionalista, consideramos la sintaxis algebraica en un segundo término porque, como evidenciamos en la investigación, aun antes de los símbolos existen significados; además, el lenguaje algebraico está "presente" en el propio uso. Nuestro programa pretende influir directamente en el sistema educativo a través de propuestas de intervención didácticas, proceso en el que seguimos trabajando. Por último, sostenemos la hipótesis de que esta vía favorece la construcción de otras nociones o conocimientos, como la noción de función, o más ampliamente, la noción de linealidad; pero, esto es motivo de otra investigación.

Referencias

Buendía, Gabriela (2004), *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Butto, Cristianne y Teresa Rojano (2004), "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría", *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 1, pp. 112-148.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.
Carretero, Luz (1989), "La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años", *Anuario de Psicología,* vol. 42, núm. 3, pp. 85-101.
Cervantes, Óscar (2015), *La construcción de un lenguaje simbólico desde las prácticas socialmente compartidas*, Tesis de Maestría, Oaxaca, Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca.
Cordero, Francisco (2001), "La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 4, núm. 2, pp. 103-128.
Durán, María Martha (2012), "El estudio de caso en la investigación cualitativa", *Revista Nacional de Administración*, vol. 3, núm. 1, pp. 121-134.
Filloy, Eugenio y Carolyn Kieran (1989), "El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica", *Revistes Catalanes amb Accés Obert*, en: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51268/93013 (consulta: 5 de junio de 2014)
Filloy, Eugenio, Luis Puig y Teresa Rojano (2008), "El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 25, núm. 3, pp. 327-342.
González, Erika (2012), *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas*, Tesis de Magister, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
Lamon, Susan (1993), "Ratio and Proportion: Connecting content and children's thinking", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, núm. 1, pp. 41-61.
Malisani, Elsa (1999), "Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico", *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, núm. 13, pp. 105-132, en: http://math.unipa.it/~grim/Algebra-MalisaniSp.pdf (consulta: 7 de enero de 2014).
Mejía, Gladys y Ninfa Barrios (2008), *El álgebra geométrica como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar*, en: http://funes.uniandes.edu.co/855/1/1comun.pdf (consulta: 8 de abril de 2015).
Montiel, Gisela (2005), *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.
Palarea, Ma. de las Mercedes (1999), "La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación", *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 40, núm. 1, pp. 3-28.
Piaget, Jean y Barbel Inhelder (1977), "El preadolescente y las operaciones proposicionales", en Jean Piaget y Barbel Inhelder (eds.), *Psicología del niño*, Madrid, Ediciones Morata, pp. 131-150.
Reyes-Gasperini, Daniela (2011), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático", *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* vol. 28, núm. 48, pp. 360-382.
Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (en prensa), "Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica... ¿qué papel juega el saber matemático en una transformación educativa?", *Revista de Ciencias de la Educación*.
Reyes, Pedro y Aymara Hernández (2008), "El estudio de caso en el contexto de la crisis de la modernidad", *Cinta de Moebio,* vol. 32, núm. 1, pp. 70-89.
Roa, Alexi (2010), *La ecuación funcional de Cauchy y algunas aplicaciones*, Tesis de Maestría, Mérida (Colombia), Universidad Nacional Abierta.
Ruiz, Noemí, Mariana Bosch y Josep Gascón (2015), "El problema didáctico del algebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico", *REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 4, núm. 2, pp. 106-131.

Sierra, Estanislao (2008), *Pesos y medidas: un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc*, Tesis de Maestría, Chilpancingo (México), Universidad Autónoma de Guerrero.

Soto, Daniela (2010), *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Soto, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 59, pp. 1525-1544.

Ursini, Sonia y María Trigueros (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática,* vol. 18, núm. 3, pp. 5-38.

Usiskin, Zalman (1988), "Conceptions of School Algebra and Uses of Variable", en Arthur Coxford y Albert Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra, K-12*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19.

Experiencia docente en matemáticas: narrativas para la construcción de un discurso académico

Javier Lezama A.*

A partir de las experiencias narradas por 27 profesores de matemáticas de escuelas secundarias que participan en el programa de Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria, que se imparte en la Escuela Normal Superior Federal del Estado de Oaxaca, se reflexiona sobre la relevancia de su experiencia como colectivo social y académico, así como distintos aspectos identificados en el contenido de sus narraciones que pueden ser indicadores de desarrollo profesional, tales como el reconocimiento de un campo académico específico para el profesor de matemáticas, identificación del discurso matemático escolar prevaleciente y la matemática escolar en que deviene, así como la problematización de dicha matemática escolar, para la construcción de un rediseño del conocimiento matemático escolar.

Palabras clave

Profesionalización docente

Profesores

Discurso matemático

Matemática escolar

Desarrollo profesional

* Profesor investigador en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Doctor en Matemática Educativa. Líneas de investigación: estudios sobre el profesor de matemáticas; desarrollo profesional docente del profesor de matemáticas. Publicaciones recientes: (2016, en coautoría con M. Parraguez y R. Jiménez), "Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio de base de vectores", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 34, núm. 2, pp. 129-150; (2016, en coautoría con S. Montoya), "La reproducibilidad de situaciones de aprendizaje en un taller de reflexión docente", *Cuadernos de Investigación Educativa*, vol. 7, núm. 1, pp. 41-54. CE: jlezamaipn@gmail.com

Las políticas públicas sobre educación en el mundo, y en el propio México, se basan, en gran parte, en los resultados de evaluaciones al desempeño de los estudiantes; a partir de ello se ha colocado a los profesores como problema y se ha creado un escenario de conflicto (al sentirse éstos excluidos y ajenos a ellas, o lo que es peor, amenazados) en vez de ser una tarea compartida con un objetivo claro y posible de alcanzar en un determinado tiempo. Dado este escenario podemos decir que, en el caso de la educación matemática en la escuela, el campo académico de la matemática educativa (*mathematical education*, *didactique des mathématiques*) se ha planteado como problema el tema de la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

¿Cómo debe ser el profesor de matemáticas? ¿Cuál debe ser su conocimiento, sus competencias, sus habilidades? ¿Cómo adquirir y desarrollar estas competencias y habilidades? Éstas son algunas de las preguntas que podemos encontrar en múltiples artículos de revistas especializadas. Ejemplo de ello es el 15th ICMI Study, encargado por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), cuyo foco de atención fue la formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en el mundo.

Even y Ball (2009) colocan, como premisa de partida del estudio, que los profesores son la clave de oportunidad del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. A la pregunta de por qué llevar a cabo un estudio sobre la formación profesional de los profesores de matemáticas, estos autores se plantean, entre otras razones, el reconocimiento del rol fundamental del profesor en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos, el cual se traduce en demandas específicas respecto de lo que sabe y lo que es capaz de hacer. Otra de las razones que plantean es que todo esfuerzo de mejora en las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos, en los distintos niveles educativos, va a la par con oportunidades de aprendizaje y formación de los profesores; y aclaran que la formación profesional de los profesores de matemáticas es crucial en el proyecto de una mejora en la educación matemática de la sociedad. Si bien el estudio recoge y analiza información generada por varios años en publicaciones y reportes de diferentes partes del mundo reconocidos académicamente, podemos identificar una amplia brecha entre lo que ahí se dice y las preguntas que legítimamente puede hacerse un profesor de aula en nuestro país: ¿qué sociedad?, ¿qué escuela?, ¿para qué sociedad?, ¿qué profesor?, ¿qué prácticas educativas?, etcétera. Si bien los profesores reconocen la universalidad de las matemáticas, requieren en su práctica educativa la necesidad de anclarla a realidades sociales y culturales concretas.

En el Editorial del volumen 16, número 1 de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* (2013) se hace mención de algunas investigaciones y propuestas en relación al desarrollo profesional docente en el mundo, y especialmente en América Latina. Se señala que la visión latinoamericana está presente ya en los reportes internacionales, pero lo reportado en la literatura internacional aún es reducido. Claramente estamos ante un campo emergente sobre el cual tenemos mucho que andar, y se dice:

> [La] *Relime* impulsará la publicación en esta temática en un momento en que los sistemas educativos de diversas partes del orbe se esfuerzan por impulsar reformas educativas basadas en sistemas de evaluación del logro educativo y suelen colocar al quehacer del docente en el centro de las políticas públicas... [hay que] favorecer la emergencia de una línea de investigación que logre contribuir al mejor entendimiento del papel del docente en los logros de aprendizaje entre sus estudiantes (Cantoral, 2013a: 12).

En dicha propuesta se invita a la comunidad de matemáticos educativos a generar propuestas formativas para profesores en servicio, o bien apoyar y acompañar procesos en desarrollo de los mismos.

Es desde esa perspectiva que nos proponemos narrar cómo se apoyó un proceso de formación y transformación profesional de un grupo de profesores en Oaxaca, y cómo este trabajo en grupo abrió una posibilidad de transformación al retomar su tradicional organización social y visión político-gremial y cultural como base para la reflexión crítica y académica de su relación con el conocimiento matemático y sus prácticas docentes. Sólo así se podrá apostar por un

> ...cambio de concepción profundo sobre la acción de la educación matemática, es decir, transitar de un programa clásico a uno alternativo (privilegiar la racionalidad contextual, tomar las prácticas como base de la acción educativa, permitir el rediseño del discurso matemático escolar, identificar la práctica social como norma de la construcción social del conocimiento matemático y reconocer, privilegiando, el trabajo en comunidad) (Cantoral, 2013b: 34).

I

En diciembre de 2012 asistió a la Escuela de Invierno en Matemática Educativa XV que convocó la red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, un grupo de profesores del estado de Oaxaca pertenecientes a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria que se impartía en la Escuela Normal Superior Federal del Estado de Oaxaca. Esto nos permitió conocer a los profesores debido a que, estratégicamente, se incorporaron en pequeños grupos a casi todas las actividades de la escuela. Esta escuela inauguró una estrecha relación de colaboración académica con el grupo de maestría de Oaxaca. Sobre la marcha comprenderíamos que esa incorporación de varios de sus miembros a las reuniones, ahora ya permanente, constituiría uno de los rasgos necesarios en el desarrollo profesional en un profesor: el reconocimiento y sentido de pertenencia a un campo de saber específico y la incorporación a una comunidad que lo cultiva (investiga, reproduce, ejerce, Fuentes-Navarro, 1998).

II

Lo que a continuación se presenta es la expresión de los profesores de Oaxaca participantes de dicha maestría.

Después de un amplio periodo de trabajo de aula con el grupo (sesiones de fin de semana de entre cinco y seis horas cada una, y que en varias ocasiones se prolongaron por mucho más tiempo) realizado por otros colegas y por quien escribe estas líneas, en el mes de noviembre de 2013 se decidió entrevistar a todos los participantes de este proyecto, dada la necesidad de ahondar en el crisol de experiencias que ante nuestros oídos se revelaban a cada momento de nuestras sesiones. Siempre supimos que esta experiencia académica y humana era extraordinaria y queríamos profundizarla conociendo aún más a nuestros colegas oaxaqueños, no con fines de transformarlos en sujetos de estudio, sino con el interés de documentar nuestra experiencia común de vivir lo que nosotros denominamos un proceso de transformación.

Por nuestra parte, este levantamiento "testimonial" nos enfrentó a la complejidad de concretar todo aquello que se estudia e investiga en los procesos académicos formales, en contraste con la vivacidad y posicionamiento político y académico (militante) de profesores que viven a diario una realidad educativa que nos es ajena como investigadores. Por ello, parte de las implicaciones implícitas de este trabajo fue un replanteamiento, también, de la teoría. ¿Cómo entender el desarrollo profesional docente en matemáticas, sin vulnerar su visión de mundo? ¿Cómo desmontar una visión preceptiva de lo que debe ser, por una que se pueda construir en conjunto y que retome la riqueza del colectivo de profesores?

Queríamos, como se ha comentado arriba, documentar un encuentro y discernir a dónde nos llevaba en un medio plagado de dificultades y contradicciones, con la convicción de que esta experiencia nos permitiría alcanzar algo importante, humana y académicamente.

III

Se realizaron entrevistas a los 27 estudiantes de la maestría, al coordinador académico y a la responsable administrativa. En esta narración sólo se exponen comentarios de los estudiantes; dejamos de lado la administración y la coordinación académica que, debe decirse, juegan un papel clave en el proyecto, ya que la realidad del sistema educativo estatal les demandó un ingenio y entereza inusitados.

Las entrevistas se realizaron fuera de las actividades de los seminarios. Algunas se realizaron en el centro de trabajo de los profesores, otras después de los seminarios y otras más aprovechando el paro de labores, sacándolos por momentos de sus guardias asignadas.

Las entrevistas a los profesores se orientaron a que nos expusieran una autobiografía profesional como profesores de matemáticas. Si el profesor podía expresarse de manera fluida, lo dejábamos charlar de manera natural, y por momentos se le solicitaba comentar o ampliar algún aspecto. Si el profesor era parco en su narrativa, podían insertarse preguntas para darle continuidad a su charla. El preámbulo que se dio a las entrevistas fue el siguiente: "estamos en la ciudad de Oaxaca y en esta ocasión estamos con el profesor Juan, quien amablemente ha aceptado platicar su biografía profesional como profesor de matemáticas. Juan, muchas gracias, y tienes la palabra".

Las entrevistas oscilaron entre 30 y 45 minutos; todas ellas fueron grabadas y transcritas. Los profesores fueron informados de que las entrevistas serían usadas con fines académicos, con lo cual estuvieron de acuerdo. Las entrevistas formalmente constituyen comunicaciones personales y para los fines de este escrito se presentan extractos de sus narrativas sin identificación alguna.

IV

Como lo expresado por los profesores constituye, como ya se dijo, narraciones testimoniales, en este escrito se presentan únicamente extractos de algunas de ellas sin un aparato de análisis formal; sin embargo, es importante señalar que reconocemos la relevancia de una narrativa y que nos posicionamos en cuanto a su valor y naturaleza de la siguiente manera. El análisis o interpretación de las narrativas de los profesores como método de investigación entraría en la discusión metodológica sobre la subjetividad que, según Reséndiz (2008: 137), puede ser considerada en dos aspectos:

> ...el intento de lectura de lo social desde los sujetos y, como un recurso para penetrar, explorar y comprender la subjetividad, los sentidos y representaciones de los individuos sobre hechos, procesos y acontecimientos que nos interesa explorar y que forman parte de una historia personal o visión personal.

V

Los 27 profesores provienen, tanto de nacimiento como por ser ése su actual lugar de trabajo, de diferentes regiones del estado de Oaxaca. Todos ellos tienen una amplia experiencia docente, además de que han tenido una amplia movilidad a lo largo de su carrera. Hasta el momento de la realización de las entrevistas los profesores provenían principalmente de tres sistemas educativos estatales: escuelas secundarias técnicas (12), telesecundarias (10) y escuelas secundarias generales (5).

Los estudios técnicos y especializados sobre la situación de los profesores en México proveen información global y relevante para la creación de políticas públicas para atender sus necesidades de formación y desarrollo profesional, pero no sabemos el tiempo y la manera en la que dichos estudios servirán para atender las necesidades concretas de desarrollo de los docentes, y si coincidirán de algún modo con su visión personal para enfrentar la problemática que le plantea su medio social. Por ejemplo, en el Informe 2015 preparado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (*Los docentes en México*), se señala que en educación secundaria, 68.1 por ciento de los profesores de escuelas técnicas y 80.5 por ciento de los de escuelas generales enseñan en localidades de marginación muy baja, baja o media. En el extremo opuesto, tres cuartas partes de los docentes de telesecundaria prestan sus servicios en localidades de alta y muy alta marginación (INEE, 2015: 27-28).

A partir de lo manifestado por los profesores, mostramos algunos aspectos representativos de los factores y visión de lo que ha configurado su carrera profesional como profesores de matemáticas y sus estrategias personales de desarrollo. Sus planteamientos los hemos ordenado en los siguientes aspectos: ingreso a la profesión, relación con la matemática, ejercicio de la profesión y experiencia formativa actual. Como la información es amplia, rescataremos algunos aspectos tanto de profesoras como de profesores, pero sin abarcar a los 27 participantes.

VI

Ingreso a la profesión

> Estudié la primaria, la secundaria, pero saliendo de la secundaria yo me angustié porque vi que mis compañeros de la escuela se iban a la prepa y en ese tiempo estudiar la normal era saliendo de la secundaria y ellos se fueron a la prepa, y mis papás me dijeron, hijo, para lo que te podemos ayudar es para la normal, nada más, ahora sí, aunque sea de maestro (1).

> Mi profesión es docente, tengo aproximadamente ocho años enseñando, dos años no reconocidos y seis reconocidos ante mi sistema… Soy hija de maestra de primaria y soy nieta de maestra, me siento identificada con mi profesión, hasta con la sangre me siento identificada, sólo que pasa algo con los hijos de los maestros, somos señalados más, y si mi mamá es maestra en la materia de matemáticas, te presiona más, ¿por qué?, porque eres hija de la maestra te tiene que ir bien. En determinado momento me sentí presionada por mi mamá del lado de las matemáticas (7).

> Decidí entrar al sistema educativo porque digamos aparte de que supera una necesidad económica, más que nada una necesidad, yo he visto en el sistema educativo una posibilidad de autorrealizarme con todas mis barreras que he tenido en la vida (2).

> Terminé la licenciatura de Ciencias de la Computación, pero no me titulé. Se quedó ese sentimiento de frustración de no haber acabado. A pesar de no haberme titulado empecé a trabajar en la docencia, en nivel superior, en CONALEP. Hubo la oportunidad en una ocasión que fui a visitar a una secundaria para invitarlos a un curso, me ofrecieron trabajo y ahí empecé (20).

> Mi profesión inicial fue... bueno antes debo especificar que yo ingresé al magisterio teniendo sólo el bachillerato, digamos que fue una experiencia hermosa. Ingresé teniendo el bachillerato y por contrato, posteriormente hice mi carrera en Español, cursé la licenciatura en Español, y posteriormente cursé la licenciatura en Educación Telesecundaria en la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca (16).

> Estudié la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Guadalajara; actualmente estoy trabajando en la comunidad de Macuilzochil, pero para llegar a esa comunidad pues pasaron muchas cosas (23).

> Cuando tenía dos años y medio de licenciatura, y al principio, cuando llegaba yo a las aulas, porque empecé a dar clases en secundaria… me empecé a involucrar más en este campo de las matemáticas y casi cuando termino la licenciatura puedo dar clases en preparatoria… en algún momento, alguien me dice, "sabes qué, ¿quieres dar clases en la universidad?", entonces para mí fue un reto muchísimo más grande, entonces mi mayor experiencia, y la más padre que he tenido, es haber dado clases en la universidad. Entonces impartía la materia de Lógica, pero para esto a la par estaba haciendo la tesis, entonces hacía mi tesis y en la tesis iba a ver cómo mi maestro impartía su clase… por problemas personales, también tuve que regresar, y entonces decido entrar al magisterio, pero cuando ya iba a la mitad de que casi entraba, decía "pues qué estoy haciendo aquí" porque me enfrenté a situaciones con mucha... muchas situaciones de compadrazgo… entonces me mandan a que yo tenía que hacer derechos fuera, entonces me mandan a la costa… pues era muy difícil para mí adaptarme a todo ese cambio, yo decía no, ya me quiero regresar, pero ya aquí estoy, ya no puedo hacer más, entonces en esa comunidad yo no le veía el sentido, yo decía, no pues cumplo mi tiempo que tengo que estar y me voy (23).

> Estudié en el Centro Regional de Educación Normal de Oaxaca, mejor conocido como CRENO. De ahí estudié en la Normal Superior. Mi idea era estudiar en la Normal Superior que estaba en México… en Veracruz estuve estudiando la especialidad de matemáticas. Me di de baja temporal dos veces y vine a terminar aquí en la primera generación de la Normal Superior de Oaxaca (24).

Circunstancias, tradición, necesidad, vocación son elementos que nos manifiestan los profesores en sus narrativas. Es preciso reconocer que constituyen un grupo de profesores excepcionales, pues manifiestan una constante necesidad de mejora personal y profesional una vez que se incorporan a la docencia; con ello logran problematizar las circunstancias que van enfrentando en sus diversos sitios de trabajo y buscan en la instrucción formal las herramientas que les ayudarán a enfrentar los problemas que les plantea su actividad docente en sus escuelas.

Es importante reconocer que incorporarse a la profesión docente en su medio social no es fácil, pues enfrentan un aparato cultural y político carente de reglas claras y equitativas para competir por plazas. Hay en ellos, en contraste con esa circunstancia, unas características que también los hace un grupo especial: una fuerte tendencia a discutir y construir acuerdos, cooperar, construir colectivo, y una singularísima disposición a ocupar el tiempo que sea necesario para enfrentar casi cualquier asunto académico o práctico.

Son esas historias particulares y colectivas las que enriquecen al grupo en formación y hacen viable una reflexión profunda sobre la educación matemática de sus estudiantes.

Fue relativamente fácil identificar en ellos una fuerte necesidad de intervenir por el cambio educativo; con sus actitudes varios de ellos manifestaban un deseo profundo de ser agentes de ese cambio, es por ello que pudieron estudiar y discutir con intensidad el enfoque socioepistemológico. Parafraseando a Cantoral (2013b), el medio para lograr la transformación educativa que tiene como objetivo la democratización del aprendizaje de la matemática escolar es el rediseño del discurso matemático escolar que exige un cambio de concepción profundo sobre la acción de la educación matemática. Este grupo de profesores y académicos, trabajando juntos, podrían construir una experiencia de transformación educativa en la que convivan la acción política con la acción académica.

VII

Relación con la matemática

> Las matemáticas me encantan, me encantan más cuando puedo aplicar lo que sé en la vida cotidiana, y en la vida fuera de clases, fuera de la escuela… Las matemáticas tienen que ver o nacen de una realidad…
>
> Con relación a las matemáticas, considero que desde pequeño, desde la secundaria, me llamaban la atención las matemáticas. Mi padre es albañil, trabajé con él en la albañilería y pues de alguna manera, las matemáticas se utilizan en la albañilería. Me llamó la atención que hasta para el hecho de hacer una escalera se ponía a hacer… a pesar de no tener… nunca fue a la escuela mi papá, sabía hacer sus trazos y cálculos, y cuando yo iba en la secundaria le ayudaba a hacer sus cuentas, sus presupuestos, fue la razón por la que me empezaron a llamar la atención las matemáticas y de alguna manera se me facilitaron un poco en la secundaria, en la preparatoria (20).
>
> Esto es pues una aportación de mi padre cuando me decía que las matemáticas están con nosotros desde que nacemos y él siempre manejó ese término de que las matemáticas están inherentes a nosotros… esto que voy a decir lo he aprendido de maestros que me han apoyado en mi formación, de que las matemáticas no solamente es parte del trabajo académico sino es también para usarlas como herramienta en la vida cotidiana (16).

> En la preparatoria pues se me hizo muy pesado el primer semestre, entonces el primer semestre reprobé matemáticas… lo que hicieron es buscarme un profesor de matemáticas… de él aprendí mucho, me enseñó muchas cosas, y una de las cosas es que él era muy disciplinado… después empezó a crecer esa inquietud por las matemáticas, y después reprobaba historia y las demás materias, pero matemáticas no. Entonces cuando llega el momento de decidir, porque empezamos a decidir en quinto y sexto semestre, entonces opto por matemáticas, y temas selectos de física, pues que me llevan a carreras como las ingenierías y esas materias, entonces tomo la decisión y me enfrasco en las matemáticas (23).

> Mi inclinación ya en estos momentos es mejorar mi práctica docente… quiero comentar algo que se me estaba pasando, después de que presenté examen me di cuenta que venían en el examen dos derivadas, dos integrales… ya no me acuerdo… no sabía nada de cálculo. Entonces dije, por consciencia ya nadie me está exigiendo, ya estoy adentro. Me di a la tarea, una tarea, digamos, un poco especial. El examen fue más o menos antes de diciembre. Entonces en diciembre, dije "espero vacaciones" y en un mes, estudié lo que es cálculo diferencial… Yo vi un libro de mi hijo que estudió en el COBAO. Entonces le dije, "préstame tu libro". Conseguí el de integrales, entonces en diciembre terminé, más o menos en una jornada de ocho, nueve horas o diez, o más, a veces un poquito menos, con promedio de ocho horas al día, estudiando cálculo, resolviendo los ejercicios. Terminé en diciembre, en enero hice el cálculo integral (24).

En estas declaraciones, los profesores son enfáticos al ligar a la matemática con la realidad, o las matemáticas prácticas en el mundo; no son intuiciones, nacen de experiencias concretas. Esas matemáticas en muchos casos están fuera de la escuela. Tales convicciones obligan a una reflexión teórica que las redimensiona, pues son una constante en el discurso de los profesores.

VIII

Ejercicio de la profesión

> Bueno, pues como yo me consideraba como intelectual, y cuando me dijeron que en telesecundaria se enseñaba de todo, yo dije "yo quiero enseñar ahí porque quiero enseñar de todo". Y sí se me hace un espacio muy propicio, pero ahorita he encontrado muchas dificultades, en la escuela donde estoy no me siento satisfecho, no estoy contento con la forma de trabajar, la indisciplina está fuertísima, nosotros los maestros no nos podemos poner de acuerdo, nos hemos sentado a ver qué sucede y eso es en lo que estoy batallando, sobre la indisciplina más que sobre los contenidos… en cuanto a matemáticas pues diseño mis clases, hago mis propuestas, pero me las tiran los muchachos porque no quieren, no les interesa (1).

Me mandaron a la sierra de Oaxaca en un lugar que se llama Santiago Comaltepec, sin sueldo, sin ningún compromiso más que ¿quieres ir a trabajar? Ve a trabajar. Pero cometieron un grave error, en los interinatos me dieron matemáticas. Fui inmensamente feliz enseñando los procedimientos, las características, sin gritarles, sin desesperarme, porque en determinado momento no me tuvieron esa paciencia, y ellos al sentirse seres humanos aprenden más rápido… Definitivamente, también hubiera sido buena como ingeniera industrial [lo es] frente a fábrica, pero estoy apasionada con los niños, por ciertas características, tengo posibilidades de moverme a donde yo quisiera, o saltar a una oficina de IEEPO pero no, sería un error cambiar el ambiente de mi aula que irme a una oficina con personas mayores (7).

Me sirvió mucho la Normal, porque me empecé a dar cuenta que ensañaba yo como dice el dicho, como Dios me dio a entender, así de fácil. No sabía yo planear, la verdad no sé cómo enseñaba, tengo la idea de que simplemente trataba yo de enseñar como me enseñaron, posiblemente era eso, pero no tenía yo estrategias de enseñanza, o sí las tenía, pero no de manera formal, todo así muy empírico, para eso me sirvió la Normal (20).

A partir de que inicié mi trabajo en la telesecundaria fui viendo lo complejo que es a veces explicar algún tema, aunque uno lo domine muy bien, lo primero, primero, y la experiencia me lo ha dicho, es, a veces llegamos, lo que hacemos es ir directo al pizarrón y ponemos ejercicios y bueno, no nos detenemos a pensar si el alumno está entendiendo (21).

Trabajé en una comunidad, alejada, a más o menos cinco horas de la ciudad. Fui fundador de esa escuela, donde no había nada, donde el maestro tiene que hacer toda la labor de, incluso gestionar la escuela, gestionar que haya muebles, que haya salones, o sea, todo, y se llega siempre con la incertidumbre de que la mitad de la población acepta la escuela (21).

Empecé a observar cosas que me llamaban la atención, por ejemplo, los niños que venían de comunidades tan lejanas, que hasta que no fui a esas comunidades no me di cuenta del verdadero valor. De cómo vivían sus familias, que eran condiciones realmente marginadas, de pobreza, que tenían que levantarse a las 5 de la mañana para estar a las 7 en la escuela, y eso me hacía a mí levantarme temprano y llegar temprano a la escuela y decía "es que tengo que estar antes de ellos porque ellos vienen de comunidades tan lejanas". Y entonces yo reflexionaba, si ellos vienen de tan lejos a recibir una clase, yo algo tengo que estar haciendo aquí de venir de tan lejos también a darle una clase a ellos, entonces yo tengo que hacerlo lo mejor posible, con todas esas condiciones y con todos esos enfrentamientos a los que yo tenga que estar, que enfrentarme a esas situaciones (23).

Me he llevado algunas decepciones porque los grupos que he tenido han salido muy bajos en matemáticas… Ese es uno de mis retos a vencer, cómo

> hacer que los alumnos, mi inclinación es hacia las matemáticas… En matemáticas hay temas, como en otras materias, que se pueden abordar, por decirlo así el teorema de Pitágoras, o las partes de una circunferencia, de un círculo: una tangente. Salen a la cancha, trazan con gis, con cuerda, o juegan, pues, forma una secante, una tangente, forma una circunferencia, qué es un círculo. Entonces cuando veo que hay actividades que, tienen ellos ya, conocimientos previos y luego la actividad se presta, es más factible para enseñarla. Ahí es cuando veo que sí se logra mejor el aprendizaje (24).

A pesar de su actitud proactiva, los profesores experimentan una gran frustración al ver los resultados de sus acciones. En los ejemplos que hemos expuesto vemos que hay un intento de encontrar alternativas didácticas o pedagógicas para la mejora de sus resultados. Esta experiencia es una de las fuentes de rebeldía en el profesor que experimenta tener pocas alternativas a los problemas que está viviendo. La propuesta de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria no se limita a aportar técnicas innovadoras o prácticas didácticas que redunden en la misma matemática escolar, sin problematizarla; por el contrario, de la mano de los profesores, trata de indagar la naturaleza del discurso escolar que hace que esas problemáticas aparezcan, y que en la práctica excluyen del conocimiento a muchos estudiantes.

IX

Experiencia formativa actual

> [Me permite] tener claras las cosas que yo he enseñado, porque lo que enseñaba antes eran las cosas que marcaba el libro; ahora lo que se nos pueda dar es saber con certeza las cosas que necesitamos como seres humanos, que es una necesidad social, que no es porque dice que este tema el libro y eso apréndete, quién sabe en qué lo vayas a ocupar, pero apréndetelo; entonces yo creo que aquí es otra perspectiva (1).

> Cada seminario que terminamos y en cada tema del seminario que terminamos, nos salimos con la idea de que ya está cerrado este círculo, pero no, vuelve otro seminario y nos dicen que, no nos lo dicen, lo entendemos que falta mucho, o sea hay más que escarbarle. Si quisiéramos dejarlo en la parte superficial así, en los temas, podríamos dejarlo y darlo por entendido, pero si le empezamos a rascar un poquito más nos vamos a encontrar, que estamos encontrando allá, debajo de esa superficie otra civilización, que soporta a un contenido matemático. Entonces sí hay mucho qué escarbar (2).

> Veo que me ha servido, creo que sí he evolucionado. No me conformo con los resultados, califico un examen pero no voy al resultado, veo… y si he… reconozco que tal vez me estoy echando porras a mí mismo, de que sí llego a preguntarme, ¿qué quiso decir este niño acá? No sólo el resultado.

> Ayer, antier, estaba yo calificando exámenes de sistemas de ecuaciones, y algunos se veían mal, mal, pero ahora ya no les exijo que el resultado sea correcto, trato de entender qué caramba hizo. Ahora sí y antes no, no hacía yo eso. Resultado, sigo el algoritmo, paso a paso como se lo di, bien y con el resultado. Creo que en ese sentido sí he evolucionado porque trato de entender el proceso que hacen ellos. Considero que es incipiente, apenas ese interés, considero que sí ha habido cambios en ese sentido… Hay un doble beneficio porque estoy viendo que las matemáticas se pueden enseñar de otra forma. Hoy, por ejemplo, decían, no son los resultados, las matemáticas, no sé cómo dijo, son hechas por expertos y para expertos, y no es cierto, es para todo peatón, y me parece que eso me está brindando esta maestría, otro panorama. A no ser tan cuadrado, de estarme rigiendo por él… he tratado de leer un poco, y traté de romper con ese discurso de la matemática (20).

> Ahora ya no llego al aula con sólo el algoritmo que voy a trabajar ese día, sino llego habiendo leído la aplicación, si es posible, cómo se originó ese conocimiento, porque hoy sé, gracias al tiempo que tengo en esta maestría de matemáticas, que todo conocimiento tiene un origen, que surgió de una necesidad social. Eso me ha motivado a que ahora me interese también por investigar cómo o por qué se originó ese conocimiento que vamos a trabajar (16).

> Siento que la teoría en la cual se basan los que nos han venido a apoyar en esta maestría es precisamente es ser social, abarcar a un número inmenso de personas y no ser discriminativo, [no] separar, éste sí, éste no y eso es lo que he estado. Yo lo he llevado a la práctica con mis alumnos siempre, pero ahora es aún más porque siento que tengo esa responsabilidad de aportar ese granito de arena que me corresponde para que en su momento yo pueda jalar a más gente… una meta, por ejemplo, que tengo es platicar todo esto cuando ya tenga las condiciones, platicarlo con mis compañeros de trabajo y tratar de impulsar esta nueva forma de ver las matemáticas (21).

> Lo que veo que va a pasar, considero que es que debo de cambiar mi forma de planear y de mi actitud con los alumnos. De tal manera que esto necesito experimentarlo pues, porque una cosa es pensarlo y otra cosa es hacerlo. Los años me han demostrado que... quiero experimentar con ellos (24).

Las declaraciones de los profesores sobre lo que ha provocado esta experiencia de maestría en sus prácticas docentes, es relevante. Se puede constatar una mirada crítica al discurso matemático escolar al cuestionar el libro de texto, ya que éste forma parte fundamental de dicho discurso. Reconocer como necesidad social y humana el conocimiento matemático es dotar a la necesidad de aprender matemáticas, de una nueva visión.

Manifiestan una manera nueva de ver el conocimiento matemático; son capaces de ampliar los significados de dicho saber a partir de la experiencia y el contexto desde el que se mira.

Reconocen que su visión sobre el aprendizaje del estudiante ha evolucionado y se interesan en comprender lo que el estudiante ha construido; esto se refleja en el significado que dan a la matemática en juego. Lo anterior constituye un indicador del criterio de resignificación progresiva. El significado no es único; cambia, se amplía.

Reconocen que es posible aprender matemática de otra manera. Si bien esto no se expresa de manera explícita, es una de las reflexiones implícitas en las narrativas de muchos de los profesores. Reconocen que es posible centrar la atención en otras prácticas que hagan accesible la matemática a todos. Esta visión social de la matemática se plantea en contraste a una larga tradición de exclusión; dicha visión es el reconocimiento de que hay una nueva manera de aprensión del conocimiento matemático basado en prácticas, y la necesidad de involucrar dichas prácticas en la sociedad.

Los profesores ponen de manifiesto el carácter social de la matemática y los procesos de construcción del conocimiento matemático y de aprendizaje; al mismo tiempo, expresan la importancia de ampliar la reflexión a sus colegas y colectivizar dicha reflexión para enfrentar la tarea en grupo.

Finalmente, también reconocen que aprender matemáticas es tener experiencias y que es posible hacerlo con los estudiantes.

Las declaraciones hechas por los profesores son inusuales por su contenido y ponen de manifiesto un proceso de cambio de visión de los profesores respecto a la matemática escolar y, por consecuencia, al aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

Conclusión

Este grupo de profesores que tratamos de describir, así como su experiencia de desarrollo profesional, no se centra en plantearse qué le falta, cómo debe ser y qué debe saber, sino ha retomado su inconformidad y su deseo de transformación educativa criticando el discurso matemático escolar y la matemática escolar, problematizándolos, redescubriendo la dimensión social del saber matemático. Busca mirar de una manera distinta a la matemática. Éstos, entre otros aspectos, posibilitan la construcción de un colectivo académico que provoca que sean sus miembros, los protagonistas de su propio desarrollo profesional.

Referencias

Cantoral, Ricardo (2013a), "Editorial. Tendencias: los métodos de investigación para la profesionalización docente en matemáticas", *Relime,* vol. 16, núm. 1, pp. 5-12.

Cantoral, Ricardo (2013b), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*, México, Gedisa.

Even, Ruhama y Deborah Loewenberg Ball (2009), "Setting the Stage for the ICMI Study on the Professional Education and Development of Teacher of Mathematics", en Even Ruhama y Deborah Loewenberg Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Springer Science. DOI: 10.1007/978-0-387-09601-8_1.

INEE (2015); *Los docentes en México: Informe 2015*, en: http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/informe/Los_docentes_en_Mexico._Informe_2015_1.pdf (consulta: 3 de octubre de 2016).

Fuentes Navarro, Raúl (1998), *La emergencia de un campo académico: continuidad utópica y estructuración científica de la investigación de la comunicación en México*, Guadalajara, ITESO/Universidad de Guadalajara-CUCSH.

Reséndiz García, Ramón R. (2008), "Biografía: proceso y nudos teórico-metodológicos", en María Luisa Tarrés (coord.), *Observar, escuchar y comprender: sobre la tradición cualitativa en la investigación social*, México, FLACSO/El Colegio de México/Miguel Ángel Porrúa, pp. 135-168.

Condiciones para la innovación educativa en el posgrado

El caso de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria en Oaxaca

Gisela Montiel Espinosa*

En este artículo presentamos una experiencia de trabajo con profesores oaxaqueños del nivel secundaria, en un seminario de posgrado. Reportamos un breve análisis del comportamiento innovador del profesor relacionado con las tareas de confrontación de saberes, resignificación de la matemática escolar y de análisis del pensamiento matemático, vinculadas al diseño didáctico, para enfatizar que dicho comportamiento es desarrollable cuando se atiende a la especificidad de los fenómenos didácticos relativos a la matemática. Con ello evidenciamos la pertinencia de un modelo de posgrado orientado a la profesión que articula la teoría (matemática educativa), la práctica (educación matemática) y la innovación educativa, en escenarios de cambio social, educativo y laboral.

Palabras clave

Matemática Educativa

Socioepistemología

Innovación educativa

Posgrado con orientación a la profesión

Rediseño del discurso matemático escolar

* Investigadora adjunta en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Doctora en Ciencias en Matemática Educativa. Nivel I del Sistema Nacional de Investigadores 2015-2017. Línea de investigación: construcción social de conocimiento matemático. Publicaciones recientes: (2015), "Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica", *Avances de Investigación en Educación Matemática*, núm. 8, pp. 9-28; (2014), "Significados trigonométricos en el profesor", *Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 50, pp. 1193-1216. CE: gmontiele@cinvestav.mx

Introducción

La docencia involucra complejas y variadas acciones por parte del profesor, acciones que están matizadas y condicionadas por el escenario escolar en donde se sitúan, por los enfoques educativos (que frecuentemente son distintos a aquellos en los que fueron formados los propios profesores), así como por las tradiciones escolares y por las concepciones sociales y valoraciones culturales de quién, qué y cómo enseña. Estos últimos factores se acentúan de manera significativa en la enseñanza de las matemáticas a partir del nivel básico-secundaria del sistema educativo mexicano, en buena medida porque cultural y socialmente ha sido ampliamente aceptado que quienes estudian carreras profesionales afines a la matemática las pueden enseñar sin contar con una formación docente o didáctica relacionada con ellas. Este es el caso de un porcentaje significativo de profesores de matemáticas en México.

En tanto está inmersa en la educación, es apropiado asumir a la docencia como una profesión basada en las ciencias sociales (en el sentido que plantea Becher, 1994). Sin embargo, la formación inicial del profesor de matemáticas y, en consecuencia, su dominio de conocimientos, suelen ubicarse en las ciencias puras o en las áreas tecnológicas; y su profesión (docente) le demanda, además, conocimientos y competencias propias de una formación en las ciencias sociales, humanas y de la conducta. En este sentido, postulamos que el profesor de matemáticas requiere de un campo de saber de referencia que le dote de las herramientas teórico-metodológicas y de innovación para articular su dominio de conocimientos y su quehacer profesional docente; esto, principalmente, por la naturaleza compleja y situacional de su lugar de trabajo: la escuela.

Actualmente, el desarrollo profesional docente en matemáticas es una de las líneas de investigación y trabajo más fuertes a nivel internacional en la matemática educativa; y dentro de ella se han propuesto modelos sobre los conocimientos del profesor de matemáticas. Si utilizáramos estos modelos para analizar la situación nacional sobre las acciones de la formación inicial, continua y especializada del profesor, se pondría en evidencia que un número importante de programas dirigidos al profesor se caracterizan por ofrecer mera capacitación. Carece de sentido, entonces, diagnosticar al profesor en términos de qué conocimientos tiene o no tiene, cuando el sistema educativo es responsable de su formación.

En este documento presentamos el análisis de algunos episodios de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria, de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca (ENSFO), que dan muestra del desarrollo profesional docente que se logra en un espacio formativo que atiende a la especificidad del quehacer del profesor, la educación matemática, desde un modelo de trabajo colectivo que articula los conocimientos de sus participantes para lograr la innovación educativa.

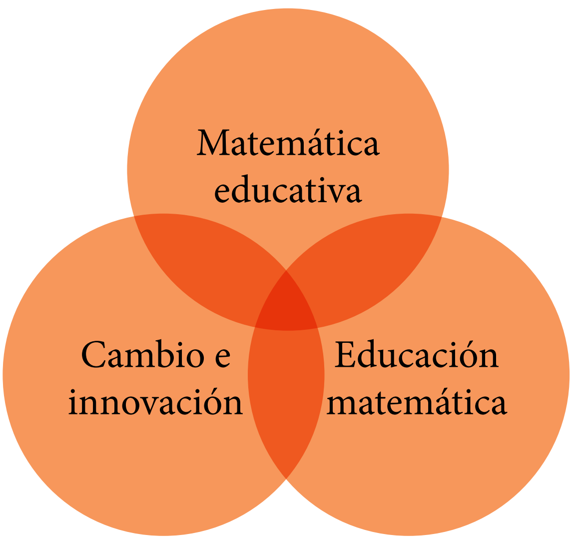
El posgrado con orientación a la profesión

Resulta fundamental reconocer que los resultados de investigación en matemática educativa, ya sean teóricos o prácticos, no son inmediatamente transferibles al aula, es decir, no son recursos que el profesor implementa como estrategias de enseñanza; pero sí constituyen conocimiento profesional relativo a los fenómenos didácticos que experimenta en su entorno profesional. Sin embargo, la apropiación de este conocimiento debe descansar en procesos de formación especializada, situados en un contexto académico de interacción entre la investigación y la práctica.

Acentuar la relación entre la investigación y la práctica desde la interacción entre ellas, supone la articulación de conocimientos que se dan en ambas. Es decir, asumimos que el docente tiene un amplio conocimiento de lo que acontece en el aula, sin el cual no es posible lograr una educación de calidad, mucho menos la innovación educativa. En ese sentido, no se proponen espacios formativos *para* el docente, sino *con* el docente; pues no se dota de conocimientos al profesor para que resuelva las problemáticas de su aula, sino que se estudian con él desde los marcos que ofrece la disciplina.

Con base en la peculiaridad de esta relación "disciplina científica-práctica profesional" usamos la conceptualización que hace Malfroy (2004) del posgrado con orientación profesional desde la vinculación universidad-práctica profesional-cambio, como una propuesta que atiende más a las necesidades profesionales de quien elige estudiar un posgrado con esta orientación. Nuestra adaptación (Fig. 1) contextualiza la problemática de desarrollo profesional docente del profesor en servicio.

Figura 1. Adaptación del modelo de Malfroy, 2004



Fuente: elaboración propia con base en Malfroy, 2004.

La universidad, como el agente que provee de los conocimientos base para la formación en el posgrado, la representamos con el campo de saber al que buscamos incorporar al profesor, es decir, con la *matemática educativa*. La práctica profesional es la forma de centrar el proceso de formación en el estudiante (en este caso, en el profesor), en sus necesidades y oportunidades de desarrollo profesional. Hemos englobado este componente con el término *educación matemática* con base en el quehacer profesional del profesor en formación, así como también en los espacios de oportunidad que se han abierto tras egresar de este tipo de programas. Si bien los egresados se mantienen en la docencia, la formación en el posgrado les ha permitido participar en proyectos de investigación, dirigir acciones institucionales de formación y actualización docente, escribir libros de texto y de investigación, elaborar materiales didácticos diversos, así como participar en diseño curricular e incluso posicionarse en la gestión directiva en sus lugares de trabajo. Éstas y otras prácticas profesionales tienen en común que le demandan al egresado entender, desde la fundamentación teórica-metodológica pertinente, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de su lugar de trabajo; de ahí que la investigación y sus resultados constituyan una vía para fortalecer dicha práctica.

El componente de "cambio" se complementa con la "innovación" a propósito de la demanda social actual en el sentido de mejorar la calidad educativa en el campo de la educación en general. El *cambio*, como una variable constante en la práctica docente, se refleja en los matices que otorga a la práctica del docente que labora en distintos niveles o sistemas educativos, o enseña matemáticas para disciplinas sociales, exactas o naturales, por ejemplo. La *innovación*, por su parte, se manifiesta naturalmente en tiempos de reforma educativa para responder a cambios de paradigma, enfoque, modelo o política educativa; pero atiende también al cambio constante del escenario social al que debe responder un proyecto educativo, por ejemplo, con la inserción de tecnología o la creación de nuevas modalidades educativas para ampliar la oferta.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que en el contexto de grandes reformas los profesores pueden ser meros ejecutores, más que iniciar procesos de cambio (Thurlings *et al.*, 2015). De ahí que, para reconocer las condiciones que permitieron la innovación educativa en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) de la ENSFO, lo haremos a través de algunas herramientas de análisis del comportamiento innovador.

Consideraciones situacionales de la práctica educativa en el contexto oaxaqueño

El componente "educación matemática" del modelo (Fig. 1), como parte de la práctica educativa, se enmarca en el Plan para la Transformación de la Educación de Oaxaca (PTEO), cuyo análisis e implicaciones se desarrollan en el artículo de Vásquez-Vicente (2016), en este número especial de *Perfiles Educativos*. Su articulación con otras partes del modelo se genera cuando el coordinador académico de la MEMES formaliza un convenio de colaboración con el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN) para integrar a investigadores especialistas del Departamento de Matemática Educativa como formadores en el posgrado. La elección de los investigadores no fue arbitraria; el coordinador académico estudió la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) y encontró en ella una ruta para aterrizar la propuesta del PTEO en diseños concretos para el aula, diseños fundamentados en investigación en matemática educativa.

Así, la socioepistemología se constituye como un enfoque particular del componente "matemática educativa" del modelo (Fig. 1). El encuadre en esta teoría y la gestión del posgrado, desde su coordinación académica, orientaron el proceso formativo hacia el rediseño del discurso matemático escolar (rdME).

Teoría socioepistemológica. Un acercamiento al campo de saber

La TSME es un planteamiento teórico innovador que se ha dado a la tarea de comprender los procesos de constitución del saber matemático en tanto creación humana y, por lo tanto, situado cultural, histórica e institucionalmente (Cantoral, 2013). En este planteamiento, las dimensiones del saber (social, epistemológica, didáctica y cognitiva) son estudiadas, desde un enfoque sistémico, a través de la actividad humana, y ello permite tomar como objeto de estudio situaciones que no están definidas en una estructura matemática y que, sin embargo, están presentes cuando se estudia al ser humano haciendo matemáticas, y no sólo su producción matemática (Arrieta *et al.*, 2004). Es decir, otorga a la actividad humana la función de construir los objetos y los conceptos matemáticos en escenarios y contextos particulares.

Así, esta teoría estudia al conocimiento matemático como producto de una construcción social, basada en prácticas y, en consecuencia, centra su atención en el sujeto social; aquel que actúa y piensa en interacción con un medio organizado para que, intencionalmente, se construya conocimiento. Es decir, no es el conocimiento matemático lo que orienta el pensamiento social hacia un pensamiento científico, sino que a partir del pensamiento social y la actividad matemática se da una vía de desarrollo del pensamiento matemático (Buendía y Montiel, 2011).

Desde la TSME no se busca que el estudiante aprenda los conceptos matemáticos y les otorgue un sentido utilitario dentro y fuera de la matemática, sino que el conocimiento matemático escolar sea realmente funcional, es decir, que tal conocimiento se integre y se resignifique permanentemente en la vida para transformarla (Cordero, 2006). Los usos y los significados del saber son construcciones humanas producto de la experiencia y, en consecuencia, susceptibles de reconstruirse en las condiciones apropiadas. En este sentido se propone que los individuos en situación escolar no sientan la necesidad de negar o abandonar su pensamiento social para aprender un saber pre-establecido por el discurso matemático escolar; por el contrario, reconocemos la importancia de incorporarlo a la construcción de un conocimiento funcional dentro del contexto formativo en el que se sitúa. Así, la matemática debe reconocerse, por el individuo, como conocimiento producto de su hacer y pensar en interacción con su entorno.

La especificidad de los fenómenos, objeto de estudio de esta teoría, radica en una premisa fundamental: *la problematización del saber matemático*. Esta problematización se reconoce al considerar a la matemática en juego como un actor de la unidad de análisis, al cuestionar su estatus de saber institucional como aquello que "se debe aprender", y al reconocer sus *usos* en distintos escenarios, por ejemplo: el histórico, el profesional, el cotidiano, e incluso el escolar cuando se experimentan diseños no tradicionales (Montiel y Buendía, 2012). Con esta problematización nos proponemos identificar aquellos significados que le son propios al saber y que se diluyen, se transforman o se pierden al configurar un discurso escolar, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos. En la TSME se propone entonces considerar los procesos de dar significado como la construcción del conocimiento en la organización de lo humano, normada por las prácticas sociales, en la que se ha involucrado y se involucra al hacer matemáticas (Cordero, 2001); de ahí que se hable de *resignificar* el saber matemático como un proceso en el que los significados se generan, se modifican o se robustecen.

Esta problematización resultó de la descentración del objeto matemático, mas no de su abandono, pues enriquece mediante las prácticas nuestro entendimiento del concepto matemático y de sus propiedades, para hacerlo una entidad funcional con valor de uso (Cantoral, 2013). Por ello, la teoría nos hace transitar *de los objetos a las prácticas*, de tal suerte que, por ejemplo, aceptaríamos que se cuestionara la pertinencia de enseñar cálculo diferencial en la educación media superior, mas no que se cuestione el derecho de los ciudadanos a desarrollar su pensamiento y lenguaje variacional, matematizando el cambio a través de sus variaciones sucesivas.

Así, los resultados de las investigaciones enmarcadas en esta teoría constituyen explicaciones en términos de acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas, normadas por prácticas sociales a las que denominamos *epistemologías de prácticas*. Consistente con el proceso de innovación basada en el conocimiento, estas epistemologías de práctica serán la fundamentación de los diseños didácticos, de ahí que la relación investigación (teoría)-práctica (interacciones de aula) sea bidireccional: retroalimenta, fortalece y modifica la una a la otra. Evidentemente esta relación demanda de colectivos académicos, no sólo de profesores que aprenden y aplican enfoques educativos.

Es por ello que las experiencias de formación docente que se han fundamentado en esta teoría comienzan por la organización de escenarios formativos donde el profesor confronta su dominio de conocimientos, es decir, buscamos que problematice la matemática (escolar) que ha aprendido, que enseña y que busca que aprendan sus estudiantes. Postulamos que así se logrará modificar la práctica docente en lo que respecta a la educación matemática en particular, sin importar el enfoque educativo que se desee implementar en todo el sistema educativo.

Comportamiento innovador y rediseño del discurso matemático escolar

Messmann y Mulder (2011, cit. en Thurlings *et al.*, 2015) identifican que el comportamiento innovador del profesor engloba: observar, escuchar y adaptar ideas; construir estrategias para la acción; valorar a través de la reflexión y la evaluación; ajustar la innovación y encontrar aliados. Estas acciones no viven *a priori* en el profesor; hay factores diversos que influyen en este comportamiento. El modelo conceptual preliminar de Thurlings *et al.*, (2015) da cuenta de ello: ofrece una visión de conjunto de las relaciones entre los factores organizacionales, demográficos e individuales, y el comportamiento innovador; el factor organizacional es el que más variables presenta y, podemos proponer, donde más oportunidad hay de incidir desde el sistema educativo para incentivar el comportamiento innovador del profesor.

Desde el espacio formativo del posgrado que conformamos, iniciamos dando al profesor la experiencia de confrontar su dominio de conocimientos, de problematizar la matemática escolar para develar lo que ha invisibilizado su proceso de transposición didáctica: los significados que se trasmiten en el aula y que se mantienen aún con el cambio de enfoques educativos o estrategias pedagógicas. A esto se le denomina *discurso matemático escolar* (dME) y

> ...no se reduce a la organización de los contenidos matemáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Cantoral *et al.*, 2006: 86).

Soto y Cantoral (2014) han caracterizado al dME actual como un sistema de razón que produce una violencia simbólica y excluye de la construcción de conocimiento matemático. Por ello enmarcar el proceso formativo del posgrado en la TSME supuso orientarlo hacia el rediseño del discurso matemático escolar (rdME), es decir, hacia el diseño didáctico centrado en un aprendizaje basado en prácticas, y no en el dominio de los objetos de la matemática escolar.

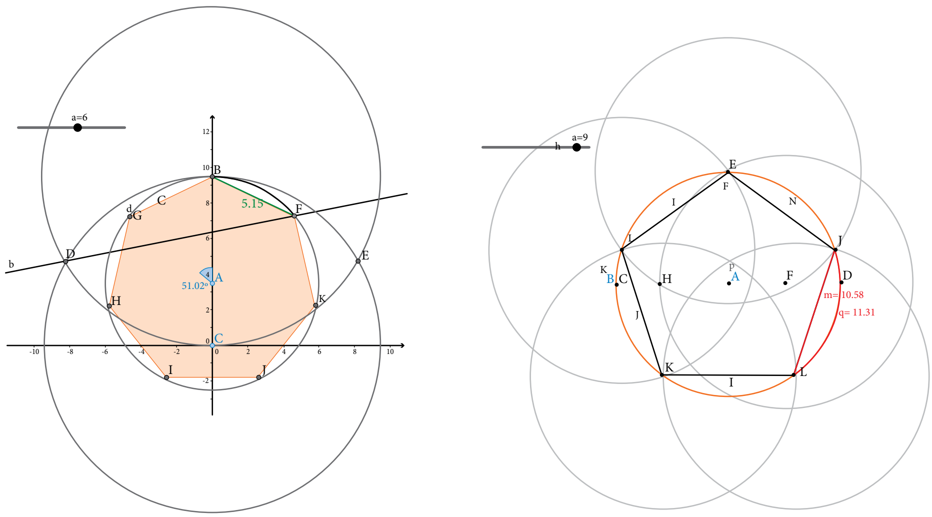
Experiencia formativa y desarrollo del comportamiento innovador

El seminario que reportamos para evidenciar el comportamiento innovador del profesor atendió a los procesos de construcción social de conocimiento trigonométrico (cuyos detalles pueden consultarse en Montiel, 2011; Montiel y Jácome, 2014; Cantoral *et al.*, 2015), que lo hizo transitar de una perspectiva que introduce a la trigonometría a través de las razones trigonométricas, a una que les da *uso* y *significado* haciendo construcciones geométricas y estudiando la relación *ángulo-cuerda* y la naturaleza de dicha relación. El objetivo fue dar a la razón trigonométrica el estatus de herramienta proporcional para el estudio de una relación no-proporcional.

Construcciones geométricas para estudiar trigonometría

La tarea de construir polígonos regulares inscritos en una circunferencia, sin hacer la división de 360º entre el número de lados del polígono para calcular la medida del ángulo que subtiende cada lado, demandó del profesor estudiar procedimientos de construcción geométrica y llevarlos a cabo usando regla y compás, así como herramientas de geometría dinámica (Fig. 2).

Figura 2. Construcciones geométricas de los profesores, usando geometría dinámica



Heptágono

Pentágono

Fuente: elaboración propia.

Con excepción del triángulo equilátero y el cuadrado, la construcción geométrica de otros polígonos regulares, inscritos en la circunferencia, no está incluida en las tareas matemáticas de la educación secundaria, de manera que la tarea le exige al profesor ir más allá de su conocimiento matemático para la enseñanza. El estudio de estos procedimientos de construcción, por parte del profesor, se evidenció en los guiones que prepararon, en equipos de trabajo, para realizarlos usando la herramienta de geometría dinámica (Fig. 3).

Aprovechando las construcciones dinámicas y la posibilidad de variar el radio de las circunferencias, se elaboraron tablas "ángulo-arco" y "ángulo-cuerda (lado del polígono)" para comenzar el estudio de estas relaciones, pues nos dan la oportunidad de confrontar la que guarda una relación proporcional con la que no (Fig. 4).

Figura 3. Extracto de un guion con el procedimiento para construir un polígono de 11 lados inscrito en la circunferencia

Proceso de construcción. Para construir una figura plana de once lados seguiremos los siguientes pasos:

No.	Icono a seleccionar	instrucciones
1	deslizador	Seleccionar dentro del área de trabajo la ubicación del deslizador, dejar nombre por default (a), con los siguientes parámetros: intervalo mínimo 1; máximo 10; incremento de 1.
2	Circunferencia centro, radio	Seleccionar el punto A(0,0) del eje cartesiano, asignar nombre del deslizador (a), para articularlos.
3	Punto de intersección	Crear punto de intersección circunferencia y eje Y, punto B.
4	Circunferencia centro-punto	Crear circunferencia(d) con centro B y radio A.

Fuente: tarea entregada por un profesor, estudiante de la maestría.

Figura 4. Extracto de la tabla para registrar las medidas del ángulo central y su arco y cuerda subtendidos

	Triángulo		Cuadrado			Octágono		
Radio en cm	Longitud de arco	Longitud de cuerda	Ángulo central	Longitud de arco	Longitud de cuerda	Ángulo central	Longitud de arco	Longitud de cuerda
1	2.0944	1.73205	90	1.5708	1.41421	45	0.7854	0.76537
2	4.18879	3.46410	90	3.14159	2.82843	45	1.5708	1.53073
3	6.28319	5.19615	90	4.71239	4.24264	45	2.35619	2.2961
4	8.37758	6.92820	90	6.28319	5.65685	45	3.14159	3.06147
5	10.47198	8.66025	90	7.85398	7.07107	45	3.92699	3.82683
6	12.56637	10.39230	90	9.42478	8.48528	45	4.71239	4.5922
7	14.66077	12.12436	90	10.99557	9.8949	45	5.49779	5.35757
8	16.75516	13.85641	90	12.56637	11.31371	45	6.28319	6.12293
9	18.84956	15.58846	90	14.13717	12.72792	45	7.06858	6.8883
10	20.94395	17.32051	90	15.70796	14.14214	45	7.85398	7.65367

Fuente: tarea entregada por un profesor, estudiante de la maestría.

Con la tabla se puede evidenciar que la relación "ángulo central-longitud de arco" es una relación proporcional, no así la relación "ángulo central-longitud de la cuerda"; por ejemplo, al doble del ángulo (ver las medidas del cuadrado y el octágono, inscritas en una circunferencia del mismo radio) no le corresponde el doble de cuerda (lectura horizontal). Sin embargo, por la variación del radio podemos ver un crecimiento constante de la cuerda (lectura vertical) que se da por figura, es decir, en relación a un mismo ángulo.

Del análisis del proceso de construcción y el estudio de la relación entre sus partes se identifican los triángulos isósceles como piezas constitutivas del polígono regular (Fig. 5) para, con una bisectriz, trazar el triángulo rectángulo (Fig. 6), establecer las razones trigonométricas y el porqué de su definición en relación a un ángulo.

Figura 5. Triángulos isósceles constitutivos del polígono regular

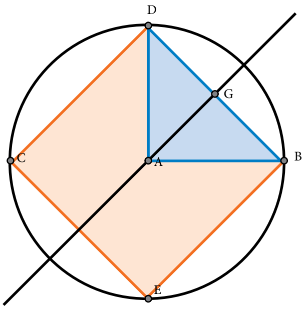
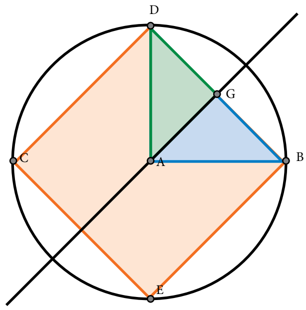


Figura 6. El triángulo rectángulo (verde) para definir las razones trigonométricas



Fuente: construcciones realizadas durante una sesión del seminario.

Con base en la evidencia recolectada en la resolución de las tareas, su análisis y la discusión de la confrontación con las tradiciones escolares, se hace una exposición de las consideraciones teóricas (resultados de investigación desde la TSME) que fundamentan el diseño de las tareas y explican la evidencia en términos del desarrollo del pensamiento matemático, enfatizando la articulación de razonamientos y herramientas proporcionales, numéricas, algebraicas, geométricas y trigonométricas que resultó de la actividad.

Hasta aquí, identificamos al profesor que va más allá de sólo observar, escuchar y adaptar ideas, y que participa, toma la iniciativa y se organiza en colectivo para llevar a cabo las propuestas que desde la disciplina (investigación científica) llevamos a su proceso de formación.

La transición del aprendizaje de la razón trigonométrica como división de longitudes, hacia la elaboración y estudio de construcciones geométricas, en el círculo, lleva a la vinculación de la actividad matemática con situaciones extraescolares (generación de ideas). Éstas son la base para construir estrategias para la acción, y si bien pueden entenderse como "escenarios de aplicación", la interacción investigación-práctica sobre la que se basa el proceso formativo orienta su diseño y análisis hacia la resignificación de la matemática en juego.

Proyecto para el estudio del pensamiento trigonométrico

El grupo de profesores presenta diversos escenarios extraescolares para contextualizar construcciones geométricas que involucran el uso de la relación ángulo-cuerda, sin embargo, reconocen la complejidad de la implementación y análisis de cada una. Finalmente deciden elegir sólo uno y llevar a cabo la planeación, el diseño (promoción de la idea) y la implementación (realización de la idea) en grupo, así como el análisis de forma individual, ya que éste constituía su trabajo final en el seminario.

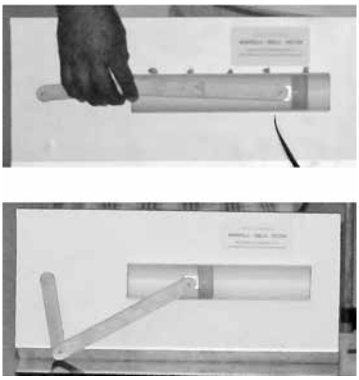
La situación extraescolar que eligen se enmarca en dos prácticas de referencia: la mecánica y la física, y plantea el estudio de un movimiento circular generado por un cigüeñal en un motor. En un análisis, una profesora describe las razones por las cuales se eligió la situación, mencionando que:

- El tema fue elegido por el conocimiento del tema por la mayoría de los integrantes del grupo.
- La visión de *angularidad* dentro del sistema manivela-biela-pistón.
- Visualización *del movimiento circular* a partir de un movimiento rectilíneo.
- *Similitud* con un problema ya resuelto con anterioridad.
- Fácil de trabajar en el salón de clases (*modelación*), *manual* y *visual*.
- El problema facilita trabajar las *funciones* y las *razones*.
- La exigencia intelectual es buena.

Estas razones reflejan la integración de los planteamientos teóricos y su relación con la actividad matemática provocada en el seminario. Hemos marcado aquellas que más se discutieron para resignificar lo trigonométrico a lo largo de esta actividad.

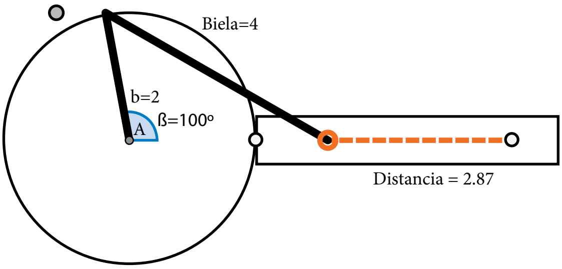
En la planeación el grupo de profesores decidió incluir videos explicativos del funcionamiento del motor y el cigüeñal, diversos esquemas y dibujos del cigüeñal, un mecanismo que simula el cigüeñal (Fig. 7) y construcciones en geometría dinámica para modelar el mecanismo (Fig. 8) y obtener medidas precisas a partir del movimiento.

Figura 7. Mecanismo que simula el cigüeñal del motor



Fuente: fotografías tomadas durante la puesta en escena de la secuencia didáctica.

Figura 8. Modelo en geometría dinámica del cigüeñal

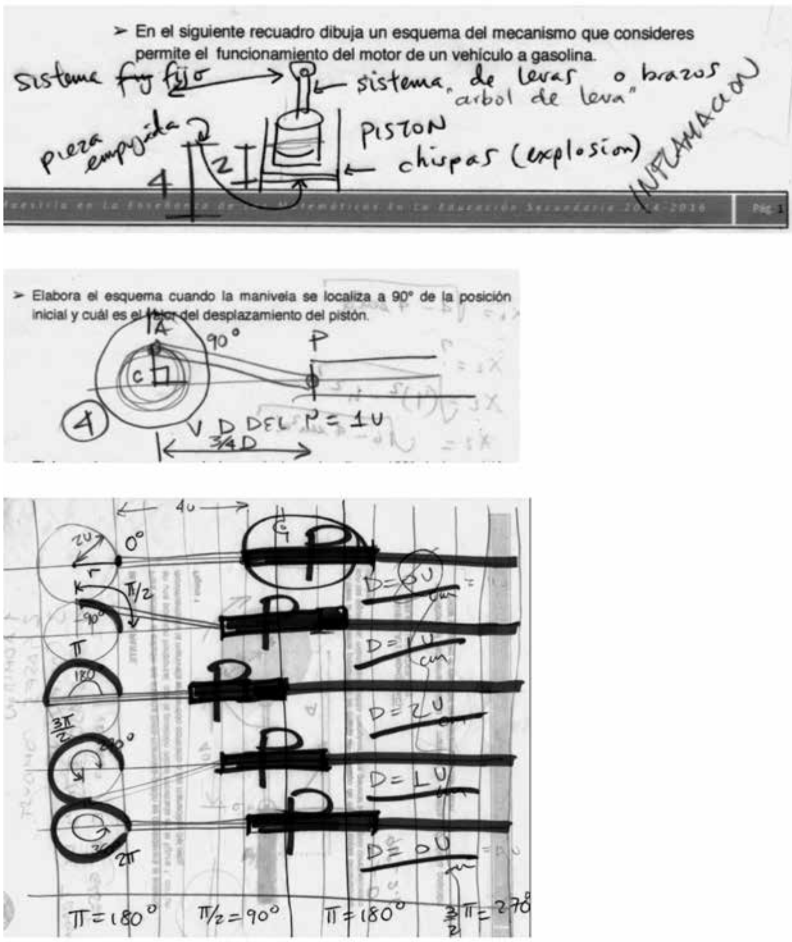


Fuente: imagen tomada de la planeación de la secuencia didáctica, elaborada por los profesores, estudiantes de la maestría.

Se decidió que la puesta en escena de la secuencia didáctica se llevara a cabo con colegas profesores, estudiantes de licenciatura, con quienes compartían horarios de estudio en la ENSFO. La experiencia resultó, además de productiva académicamente hablando, integradora para el colectivo docente; esto lo interpretamos como la búsqueda de aliados para la innovación educativa que se persigue en el estado de Oaxaca. Dado que había más integrantes en el grupo de posgrado que en el grupo de licenciatura, la atención e interacción en la resolución de la secuencia fue personalizada, lo que llevó a recolectar muchas y muy diversas fuentes de datos para el análisis.

La reflexión y evaluación del diseño se llevó a cabo desde el espacio que se abrió a los participantes de licenciatura para que opinaran sobre la experiencia, considerando tanto su planteamiento didáctico como su dinámica de organización y las herramientas de apoyo utilizadas. Los análisis del grupo de posgrado incluyen algunas de estas opiniones y registros, los cuales permiten describir la riqueza de las producciones y argumentaciones (Fig. 9), producto del diseño y de la interacción lograda.

Figura 9. Selección de registros utilizados para analizar la puesta en escena en un análisis



Fuente: imágenes tomadas de las hojas de trabajo de los profesores, participantes de la secuencia didáctica.

La evaluación del diseño se elaboró contrastando la planeación en su conjunto y la intencionalidad de cada tarea, con la evidencia empírica, es decir, con lo que sucedió en la experiencia. La orientación teórica pidió que el análisis se centrara en la matemática en juego: angularidad, construcción geométrica, unidades de medida, distancias, relación ángulo-distancia, análisis numérico, análisis gráfico, uso de modelos situacionales y modelos geométricos, herramientas matemáticas (teorema de Pitágoras, razón trigonométrica, función trigonométrica), entre otros; y que a partir del contraste se hicieran propuestas de rediseño por tarea.

Las reflexiones incluidas en los análisis acentuaron lo que se logró y no se logró, pero también lo que no esperaron que sucediera, y todo se vinculó a la propuesta teórica, al diseño y a la dinámica de organización. Este análisis funcionó como punto de partida para una prospectiva hacia el salón de clases (generación de nuevas ideas).

Aunque no hubo oportunidad de ver los ajustes a la innovación en este seminario, el proceso formativo de los profesores en la maestría consideró siempre hacerlos vivir experiencias de confrontación de su dominio de conocimientos, analizar y discutir sobre desarrollo del pensamiento matemático, y diseñar situaciones de aprendizaje para el contexto de sus salones de clase. Por ello planteamos que el comportamiento innovador del profesor se desarrolla en esta relación investigación-práctica dentro del proceso formativo, sin embargo, resulta evidente que se logra en periodos largos de profunda interacción.

Si bien no los documentamos y analizamos en este artículo, otros factores igualmente importantes para desarrollar el comportamiento innovador del profesor fueron el apoyo de la coordinación académica, la gestión escolar y la comunidad disciplinar a la que se acercó el colectivo de la MEMES. Algunos de éstos son analizados y discutidos en los artículos de este número, que en conjunto serán insuficientes para reflejar la complejidad del proceso de formación que estamos reportando, pero sobre todo para mostrar la riqueza académica, profesional y humana lograda en este programa de posgrado.

Reflexiones finales

Anteriormente postulamos que sólo atendiendo la especificidad de la demanda profesional del profesor de matemáticas lograremos la innovación en su práctica docente; y que atender este aspecto significa ir más allá de la capacitación. En este documento presentamos un breve análisis de la experiencia de trabajo en la MEMES, utilizando algunos indicadores relacionados con el comportamiento innovador en el profesor, no para diagnosticar si lo tiene o no, sino para relacionar su desarrollo a la propuesta de trabajo basada en la problematización del saber matemático, para lograr un rediseño del dME.

Thurlings *et al.* (2015) reportan en su revisión que la descripción de Janssen (2003) sobre comportamiento innovador, o al menos una de sus etapas, ha servido de base para las distintas definiciones y descripciones encontradas en estudios situados en los diversos escenarios incluidos en su revisión. Para Janssen (2003), el comportamiento innovador es un proceso de tres etapas: 1) generación intencional de la idea; 2) promoción de la idea; y 3) realización de la idea, dentro de un rol de trabajo, grupo de trabajo u organización, para beneficio de dicho rol, del grupo o de la organización (cit. en Thurlings *et al.*, 2015). Nosotros identificamos estas etapas a lo largo de la presentación de la experiencia formativa para acentuar el análisis en términos de comportamiento innovador en general.

Cómo se transforma la práctica del profesor, se ha estudiado ampliamente desde estructuras teóricas más robustas, propias de la TSME, desarrolladas por Reyes-Gasperini (2016, 2011) y Reyes-Gasperini y Cantoral (2014) en las que se proponen dispositivos de desarrollo profesional docente que, al cambiar la relación del profesor con la matemática escolar, provocan procesos de empoderamiento docente.

Aquí buscamos enmarcar la experiencia de la MEMES en el modelo del posgrado con orientación a la profesión para enfatizar la necesidad de que en los distintos niveles y escenarios de formación especializada se dé cabida al desarrollo profesional y a la innovación educativa como un ejercicio cíclico y continuo. El reconocimiento de lo que estamos enseñando y lo que realmente está aprendiendo el estudiante en el aula de matemáticas, a partir de la problematización de los saberes en juego, en articulación con las herramientas teórico-metodológicas de la disciplina y la experiencia y conocimientos del profesor (sobre todo respecto de las circunstancias institucionales y socioculturales que condicionan el aula) conforman la unidad sobre la cual se podrán sostener las innovaciones educativas en el mediano y largo plazo.

Referencias

Arrieta, Jaime, Gabriela Buendía, Marcela Ferrari, Gustavo Martínez y Liliana Suárez (2004), "Las prácticas sociales como generadoras de conocimiento matemático", en Leonora Díaz (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, Colegio Mexicano de Matemática Educativa/Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., vol. XVII, pp. 418-422.

Becher, Tony (1994), "The Significance of Disciplinary Differences", *Studies in Higher Education*, vol. XIX, núm. 2, pp. 151-161.

Buendía, Gabriela y Gisela Montiel (2011), "From History to Research in Mathematics Education: Socio-epistemological elements for trigonometric functions", en Victor Katz y Constantinos Tzanakis (eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, USA, Mathematical Association of America, pp. 67-82.

Cantoral, Ricardo, Gisela Montiel y Daniela Reyes-Gasperini (2015), "Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica", *Avances de Investigación en Educación Matemática*, núm. 8, pp. 9-28.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.

Cantoral, Ricardo, Rosa Farfán, Javier Lezama y Gustavo Martínez (2006), "Socioepistemología y representación: algunos ejemplos", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. IX, núm. 4, pp. 27-46.

Cordero, Francisco (2001), "La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. IV, núm. 2, pp. 103-128.

Cordero, Francisco (2006), "El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica", en Ricardo Cantoral, Olda Covián, Rosa Farfán, Javier Lezama y Avenilde Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte latinoamericano*, México, Díaz de Santos, pp. 265-286.

Lezama, Javier y Elizabeth Mariscal (2008), "Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica", en Patricia Lestón (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C., vol. XXI, pp. 889-900.

Malfroy, Janne (2004), "Conceptualisation of a Professional Doctorate Program: Focusing on practice and change", *The Australian Researcher*, vol. XXXI, núm. 2, pp. 63-79.

Messmann, Gerhard y Regina Mulder (2011), "Innovative Work Behaviour in Vocational Colleges: Understanding how and why innovations are developed", *Vocations and Learning*, vol. IV, núm. 1, pp. 63-84.

Montiel, Gisela (2011), *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*, México, Díaz de Santos.

Montiel, Gisela y Gabriela Buendía (2012), "Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones", en Alejandro Rosas y Avenilde Romo (eds.), *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, México, Lectorum, pp. 61-88.

Montiel, Gisela y Gonzalo Jácome (2014), "Significados trigonométricos en el profesor", *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* vol. XXVIII, núm. 50, pp. 1193-1216.

Reyes-Gasperini, Daniela (2011), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*, Tesis de Maestría, México, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo", *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* vol. XXVIII, núm. 48, pp. 360-382.

Soto, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica", *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* vol. XXVIII, núm. 50, pp. 1525-1544.

Thurlings, Marieke, Arnoud Ever y Marjan Vermeulen (2015), "Toward a Model of Explaining Teacher's Innovative Behaviour: A literature review", *Review of Educational Research*, vol. LXXXV, núm. 3, pp. 430-471.

Vásquez-Vicente, Miguel (2016), "Orígenes y complejidades de una propuesta alternativa de formación continua para profesores de matemáticas y su articulación con el nivel de secundarias", *Perfiles Educativos*, vol. XXXVIII, número especial, pp. 19-36.

El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente

Rosa María Farfán* | Fabián Wilfrido Romero Fonseca**

Se presentan los elementos teóricos y metodológicos de una situación de aprendizaje destinada al enriquecimiento de la profesionalización docente en el marco de una maestría dirigida al profesorado del estado de Oaxaca, en convenio entre la Secretaría de Educación estatal y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Los resultados de la investigación obtenidos bajo la óptica de la teoría socioepistemológica se ponen en juego para tal diseño, especialmente los derivados de la construcción de un lenguaje gráfico que posibilite la apropiación de una amplia gama de formas y operaciones. Trataremos especialmente el rol que juegan las variables de control que dirigen la gestión de la situación.

Palabras clave

Matemática educativa
Socioepistemología
Situación de aprendizaje
Lenguaje gráfico
Profesionalización docente

* Investigadora del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). Líneas de investigación: construcción social del conocimiento matemático y estudios de género y matemáticas. CE: rfarfan@cinvestav.mx

** Estudiante de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). Línea de investigación: construcción social del conocimiento matemático, especialmente sobre series de Fourier. CE: fwromero@cinvestav.mx

Introducción

De inicio diremos que la matemática educativa se relaciona estrechamente con una profunda reflexión sobre los saberes. Es importante señalar que los conocimientos mediante los cuales se establecen las relaciones didácticas no son objetos muertos que el profesor "transmite" al alumno, y que éste "recibe" y se los "apropia". Por el contrario, la matemática educativa los concibe como objetos vivientes, sujetos de evolución y cambio conforme a la sociedad en donde nacen o se enraízan. El estudio de las relaciones que el estudiante establece con los saberes que le son presentados, relaciones en sí mismas de naturaleza eminentemente móvil, es el centro de una reflexión sobre las condiciones y la naturaleza de los aprendizajes. Ello conduce a una aproximación opuesta a la "pedagogía general", en tanto que ésta ofrece reglas de aprendizaje y de la educación, independiente de los contenidos enseñados. Al menos para las disciplinas científicas y las matemáticas, cuyos contenidos son altamente estructurados, es poco probable que se pueda construir un conocimiento pertinente para explicar los fenómenos de enseñanza si no se consideran los saberes de referencia.

Esto último hace necesario un estudio epistemológico para entender cuáles fueron las causas que posibilitaron la generación de los saberes a fin de articularlos pertinentemente en el aula. Como ya señalamos, el fenómeno educativo es eminentemente social, compete globalmente a la cultura en la que se da y, por tanto, a los "puntos de vista" específicos del entorno social en el que se desarrolla; es por ello que, de manera natural, la investigación en matemática educativa se desarrolla al abrigo de diferentes paradigmas. Particularmente para la socioepistemología,

> El punto de partida para la construcción de saberes es la *actividad* normada por emergentes de naturaleza social que denominamos *prácticas sociales*. Éstas regulan el ejercicio de prácticas compartidas a través de las cuales, los sujetos (individuales o colectivos) nos relacionamos *intra* e *ínter* psicológicamente. En este sentido, los saberes son las diferentes formas de comprender y explicar las realidades y se encuentran vinculados con las *prácticas socialmente compartidas*, las que a su vez están normadas por las *prácticas sociales* (Cantoral, 2013: 48).

Indudablemente, los saberes matemáticos han sido constituidos socialmente, en ámbitos no escolares; al introducirlos al sistema didáctico han debido modificarse, lo que ha afectado tanto su estructura como su funcionalidad y las relaciones entre estudiantes y profesores. De ahí la importancia de entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático y científico a las prácticas tanto de los docentes como de sus estudiantes. La socioepistemología ha construido una categoría para abordar teórica y metodológicamente ese proceso: el discurso matemático escolar (dME):

> La socioepistemología tiene una mirada crítica al discurso matemático escolar, ya que éste tiene una centración en los objetos matemáticos y no en las prácticas sociales. Uno de sus planteamientos consiste en hacer que la matemática escolar sea funcional y deje de ser utilitaria, entendiendo la matemática funcional como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad, todo ello en oposición al conocimiento utilitario (Morales y Cordero, 2014: 327).

Dada la naturaleza del dME como ente inmóvil, carente de significados y utilitario que propicia la exclusión de la construcción social del conocimiento se pretende proveer una epistemología —la socioepistemología— que posibilite el rediseño del dME a partir de la problematización del saber matemático con miras a favorecer el aprendizaje de este saber.

En este escrito nos proponemos hacer una revisión de nuestros resultados de investigación en la construcción de un lenguaje gráfico, con el fin de posibilitar al profesorado el conocimiento de las herramientas indispensables que le permitan diseñar y llevar a la práctica situaciones de aprendizaje en el aula de matemáticas. Como han reportado investigaciones recientes (Reyes, 2016), de esta manera se favorece el empoderamiento de los docentes. Para ello iniciamos con una breve descripción de la teoría de situaciones didácticas que usamos en nuestros diseños. Si bien no pretendemos abarcar la teoría exhaustivamente, sí mostraremos los elementos que consideramos esenciales. En seguida, haremos una presentación de los resultados de manera resumida acerca de tres aspectos importantes de nuestros diseños: las operaciones gráficas, la resolución gráfica de desigualdades y la construcción de funciones.

Con ello creemos que el lector estará en condiciones de apropiarse de una visión global del quehacer de la investigación en matemática educativa junto con su aplicación dentro del aula de matemáticas con el fin de diseñar e implementar, pertinentemente, proyectos de investigación en la clase de matemáticas a propósito del tema que aquí discutiremos: el lenguaje gráfico.

Breve esbozo de la teoría de situaciones didácticas

El entorno inmediato del sistema didáctico es el "sistema de enseñanza", que está constituido por un conjunto diverso de dispositivos que permiten operar a los distintos sistemas didácticos. Alrededor de este sistema de enseñanza se encuentra el entorno social, que puede caracterizarse por la presencia de padres, académicos y las instancias políticas. En el entorno de lo que Chevallard (1991) denomina el sistema de enseñanza en sentido estricto hay un "sitio" donde se piensa el sistema didáctico, denominado noosfera. En la noosfera, los representantes del sistema de enseñanza se encuentran, directa o indirectamente, con los representantes de la sociedad. Esta versión simplificada del funcionamiento escolar puede, sin embargo, desarrollar formas muy complejas de éste.

Todo funcionamiento social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenido de saberes como contenidos a enseñar (Chevallard, 1991). Los contenidos de los saberes designados como aquellos a enseñar, en general preexisten a la definición de aquellos que son designados como tales, pero en algunas ocasiones constituyen "creaciones didácticas" por necesidades de enseñanza.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar sufre, a partir de ese momento, un conjunto de transformaciones adaptativas que hacen apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma un objeto de saber en un objeto de enseñanza se denomina "transposición didáctica" (Chevallard, 1991). La noosfera es el centro operacional del proceso de transposición; allí se producen todos los conflictos entre sistema didáctico y entorno.

Luego de que en el sistema didáctico se ha determinado un saber a enseñar, éste se convierte, sin lugar a dudas, en un saber transpuesto, despersonalizado, descontextualizado. Es labor del profesor proceder en sentido contrario al productor de tal conocimiento; debe contextualizar y repersonalizar el saber, es decir, debe buscar situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau, 1986). El estudiante que se ha apropiado de los conocimientos procede a descontextualizarlos y despersonalizarlos para poderlos usar.

Un supuesto básico de la teoría de situaciones didácticas (TSD) es que el alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986). Este supuesto se basa en principios de la psicología genética y de la psicología social, y se podrían resumir así: el aprendizaje se apoya en la acción. La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación.[1] Deben tenerse en cuenta los aprendizajes previos de los alumnos para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos: se conoce en contra de los conocimientos anteriores.[2]

La concepción moderna de la enseñanza le pide al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas a través de la elección acertada de los problemas que le propone.

Tomando una situación matemática como elemento primario podemos plantearnos cómo transformarla en una situación de aprendizaje; para ello, debemos cerciorarnos de que la respuesta inicial del alumno no constituya la respuesta "correcta", sino que se vea obligado a hacer modificaciones a sus conocimientos previos. Uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje lo constituye el hecho de que las respuestas que produce el alumno sean respuestas provocadas por las exigencias del medio, y

1 Estos constituyen elementos básicos de la obra de Piaget.
2 Esta afirmación constituye una idea fundamental de la epistemología postulada por Bachelard (1938).

no a los deseos del profesor; al logro de este hecho se le llama "devolución" de la situación por el profesor. La devolución no se realiza sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan (Brousseau, 1986).

Se llama situación adidáctica a una situación matemática específica de dicho conocimiento que por sí misma, sin apelar a situaciones didácticas, y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el alumno. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de provocar este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas (Chevallard *et al.*, 1995).

Se llamarán variables didácticas, de la situación adidáctica, aquellos elementos de la situación que al ser modificados permiten engendrar tipos de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución. El empleo que hace el profesor de situaciones adidácticas, con una determinada intención didáctica, constituyen lo que se denomina situación didáctica. La situación didáctica comprende las situaciones adidácticas, un cierto medio y el profesor, que tiene el propósito de que los alumnos aprendan un determinado conocimiento matemático.

El medio se constituye, así, en un elemento fundamental dentro de la noción de situación didáctica, ya que está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y que puede emplear con seguridad y sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado. Es muy importante notar que en tal medio se encuentra el profesor. Este hecho será de gran importancia en el momento de analizar su función en la actividad de reproducción de situaciones didácticas.

En la relación didáctica maestro-alumno se erige explícita o implícitamente un acuerdo acerca de cuáles son las responsabilidades de cada uno de ellos. Es un sistema de relaciones recíprocas análogas a las de un contrato, pero a diferencia de los contratos sociales, éste estará determinado no por reglas previas a la relación, sino por la naturaleza del conocimiento matemático buscado. Este contrato didáctico evoluciona conforme evoluciona la relación del estudiante con la situación adidáctica. El estudiante puede resistirse a la devolución de la situación, o experimentar problemas; es entonces que las acciones del profesor, traducidas a la negociación del contrato, experimentan evolución.

Finalmente, como hemos dicho anteriormente, las situaciones adidácticas están caracterizadas por un conocimiento específico; es posible establecer correspondencias entre estos tipos de conocimientos, los modos de funcionamiento de dichos conocimientos y los respectivos intercambios del alumno con el medio que aquéllos provocan. Con base en estas correspondencias, las situaciones adidácticas pueden ser definidas de la siguiente manera:

- *Situación de acción.* Corresponde a un modelo implícito que sugiere una decisión o el empleo de un algoritmo y que provoca intercambio de informaciones no codificadas. El modelo de acción le permite al alumno mejorar su modelo implícito; son acciones que aún no le permiten formular, probar ni postular una teoría.

- *Situación de formulación*. La forma de conocimiento corresponde a un lenguaje que le permite la producción de mensajes y, por ende, el intercambio de informaciones codificadas según ese lenguaje. En este tipo de situaciones el estudiante intercambia y comunica sus exploraciones a sus compañeros o a su profesor y ya puede comunicarlos en un lenguaje matemático, así sea muy incipiente.
- *Situación de validación*. Toma la forma de conocimiento de una teoría, que le permite construir sus propios juicios, los cuales pueden intercambiarse. En esta situación, el estudiante debe demostrar por qué el modelo que construyó es válido, a fin de convencer a otros de ello.

Sobre el precálculo

Tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, que tocan con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición que Dirichlet-Bourbaki formuló en 1939: el concepto general de *función* se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto. La enseñanza tiende a sobrevalorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización, y deja de lado a los argumentos visuales por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga permea su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, el cual forma parte de la negociación, en el sentido de que el recurso algorítmico permite subsanar decorosamente lo establecido en el contrato y "aligera" la responsabilidad del profesor al eliminar dificultades subyacentes al contenido matemático.

La investigación sobre las premisas que sustentan la instalación de un lenguaje gráfico que permita el tránsito entre varios contextos ha sido reportada en Farfán (2012) y Cantoral y Farfán (1998). En síntesis, hemos sostenido que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, elementos centrales del estudio del precálculo y cálculo, se precisa, entre otros, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

En términos escolares se plantea la necesidad de propiciar la modificación del curso de precálculo al inicio de los estudios universitarios; un diseño para la escuela lo presentamos en Farfán (2013). En lo que sigue expondremos, *grosso modo*, los elementos del análisis preliminar en términos de ingeniería didáctica, en el sentido de Artigue (1992), así como los elementos sustantivos del diseño a fin de proporcionar un ejemplo de innovación para la escuela obtenida de la investigación en matemática educativa.

- *Estudio epistemológico.* La naturaleza del concepto de función es en extremo compleja; su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibió como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores. Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en Sierpinska, 1992.
- *Estudio cognitivo.* Los objetos inmersos en el campo conceptual del cálculo (análisis) son particularmente complejos a nivel cognitivo pues, como en el caso que nos ocupa, la función se presenta como un proceso cuyos objetos son los números; este mismo concepto deviene en objeto al ser operado bajo otro proceso como la diferenciación (o integración), y así sucesivamente. De modo que al iniciar un curso de cálculo el estudiante debe concebir a la función como un objeto y por ende susceptible de operación; de otro modo, ¿qué significa operar un proceso? En nuestras experiencias con profesores y estudiantes hemos constatado que si logran incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, no sólo manejan a la función como objeto sino que además transitan entre los contextos algebraico, geométrico y numérico versátilmente, es decir, si se tiene dominio del contexto geométrico/visual, tanto en la algoritmia como en la intuición y en la argumentación, es posible el tránsito entre las diversas representaciones. El problema estriba en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico; por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, por lo que se acude al refugio algorítmico con facilidad.

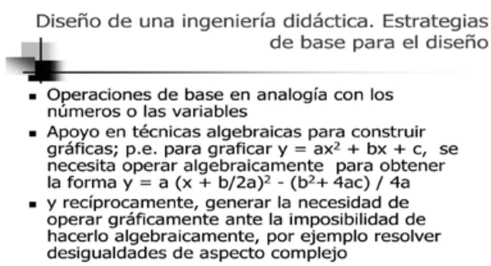
A partir de estos elementos nos proponemos un diseño con el objetivo explícito de construir un lenguaje gráfico. La hipótesis central, después de un análisis socioepistemológico a profundidad como el que se desarrolla en Farfán (2012), consiste en asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales que se presentan como virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, y que establezca un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, o mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

Esta hipótesis ha sido desarrollada tomando las siguientes directrices; en primer término se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables, dando sentido a operaciones fundamentales como las siguientes:

$-f(x)$ y $f(-x)$	Reflexión respecto del eje x y del eje y respectivamente.
$f(x+a)$ y $f(x-a)$, con $a>0$	Traslación en la dirección del eje x.
$f(x)+a$ y $f(x)-a$, con $a>0$	Traslación en la dirección del eje y.
$af(x)$	Contracción o dilatación respecto del eje y.
$f^{-1}(x)$	Reflexión respecto de la recta .
$\frac{1}{f(x)}$	Invierte ceros en asíntotas y viceversa, y las abscisas tales que $\vert y\vert > 1$ corresponderán con aquéllos donde $\vert y\vert < 1$ y viceversa, dejando intactos los puntos sobre las rectas $y = 1$ y $y = -1$.
$\vert f(x)\vert$ y $f(\vert x\vert)$	Respectivamente reflexión de las imágenes negativas al simétrico positivo respecto del eje x y reflexión de sustitución del lado de la gráfica con ordenadas negativas por la reflexión del lado de la gráfica con ordenadas positivas.

El segundo aspecto relevante lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia: la identidad ($f(x)=x$), la exponencial ($f(x)=a^x$) y la sinusoidal ($f(x)=\text{sen } x$), todas ellas para construir las funciones elementales en el sentido de Cauchy. Estas funciones sirven, respectivamente, para construir las gráficas a las funciones algebraicas, logarítmicas y exponenciales y las trigonométricas gráficamente.

Figura 1. Diseño de una ingeniería didáctica



Fuente: elaboración propia.

En este acercamiento ha resultado importante plantear situaciones-problema que involucren enunciados algebraicos que favorezcan el uso del lenguaje gráfico, por ejemplo la tarea:

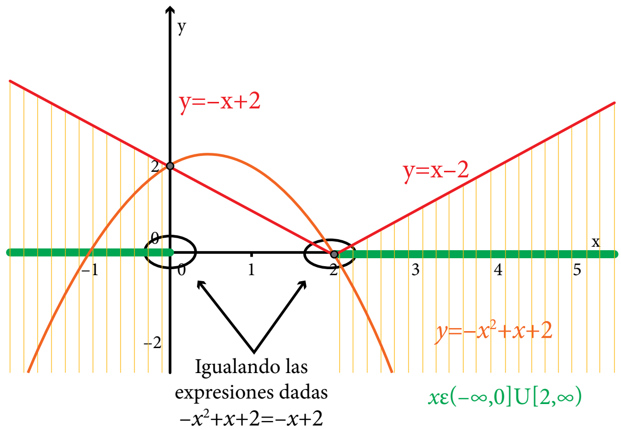
Resuelve la desigualdad $\frac{|x-a|+|x-b|}{|x+b|+|x+a|} \leq kx$

Es ampliamente desarrollada como estrategia de enseñanza en Farfán (2013), en donde el recurso de plantear la resolución de desigualdades es precisamente la variable didáctica de control del diseño que nos permite que el aprendiz deje el recurso algebraico que le ha funcionado escolarmente. Para todo ello es necesario operar algebraicamente a fin de obtener la gráfica de las funciones involucradas, para que finalmente sean comparadas y resolver de este modo los sistemas de ecuaciones a que haya lugar. Del mismo modo, buscar los extremos de funciones como $\frac{x}{ax^2+b}$ con a y b positivos, permite avanzar en la construcción del puente entre contextos, pues la tarea en este contexto sirve de guía a la sintaxis algebraica, de modo que ésta se refuerza en su significado.

Describimos enseguida un ejemplo:

Resolución de la desigualdad $-x^2 + x + 2 \leq |x - 2|$

Imagen 2. Resolución gráfica de desigualdades



Fuente: elaboración propia.

En la imagen 2 pueden notarse las gráficas tanto de $y = -x^2 + x + 2$ como de $y = |x - 2|$. El método usado es encontrar los puntos de corte de ambas gráficas, es decir, los valores para los cuales la gráfica de la función cuadrática es igual a la gráfica del valor absoluto, específicamente: $-x^2 + x - +2 = -x + 2$. La importancia de estos puntos radica en que marcan un cambio en las imágenes de una función con respecto a la otra. Esto es, en el primer punto de corte entre las gráficas, $x = 0$, las imágenes de la cuadrática pasan de ser menores a ser mayores que las imágenes del valor absoluto. En el segundo punto de corte, $x = 2$, las imágenes de la cuadrática pasan de ser mayores a ser menores que las imágenes del valor absoluto. Con este análisis es que se obtiene que en los intervalos $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$ la gráfica de $y = -x^2 + x + 2$ es menor o igual que la gráfica de $y = |x - 2|$, es decir, se satisface la desigualdad.

En síntesis, éstas son las premisas de nuestro acercamiento, cuyos ejemplos se expondrán en lo que sigue. Antes, es importante señalar que el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisan de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento pre-variacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado por Artigue (1998). Esa ruptura, además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación, sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

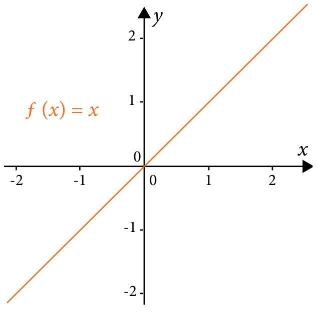
Operaciones gráficas

Creemos que es necesario rescatar algunos "mecanismos" que permitan generar conocimiento y dar significado a ciertos contenidos matemáticos. En este sentido, es importante que el estudiante logre un buen manejo del lenguaje gráfico y un pasaje fluido del contexto algebraico al gráfico. Con ello estaremos proporcionándole una base más sólida donde asentar otros conceptos de cálculo, por ejemplo, comportamiento de funciones, obtención de áreas, etcétera, y aportándole herramientas que le permitirán una mejor comprensión y, por ende, una mejor apropiación de conocimientos en niveles más abstractos.

Con el manejo de este tipo de operaciones intentamos dotar al alumno de un manejo del "lenguaje gráfico" que implica, por un lado, inducirlo a la "semántica gráfica", es decir, a la construcción de significados previos de las operaciones gráficas; y por otro, a la "sintaxis gráfica", vale decir, a su simbolización respetando ciertas reglas. En este espacio presentamos sólo el estudio de una operación, sin embargo, en Farfán *et al.* (2000) , es posible consultar otras.

$$\textit{Estudio de } \frac{1}{f(x)} \textit{ a partir de } f(x)$$

Para construir la gráfica del recíproco de una función partiremos de $f(x) = x$, pues se considera que es reconocida por el alumno. Así, se intenta que, de un análisis exhaustivo de la construcción de $1/x$, se logre la generalización a cualquier función mediante la detección de propiedades comunes.



Partimos entonces de la forma elemental $f(x) = x$

Sus características son, entre otras:

- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Es creciente, pues si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.
- Es continua.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas, por tanto, es una función impar, es decir que $f(-x) = -f(x)$ ya que $f(-x) = -x = -f(x)$.

- $f(x)$ es positiva si $x > 0$, es decir, $f(x) > 0$ si y sólo si $x > 0$.
- $f(x)$ es negativa si $x < 0$, es decir, $f(x) < 0$ si y sólo si $x < 0$.
- $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Identificar características de $f(x)$ es relevante en cuanto se desea establecer cómo se modifican o conservan estas propiedades al calcular el recíproco de $f(x)$.

a) Estudio de los puntos (1,1) y (–1,–1)

Definimos:

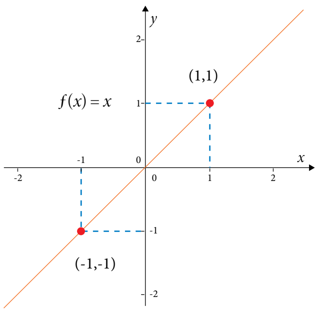
$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$\Rightarrow g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$$

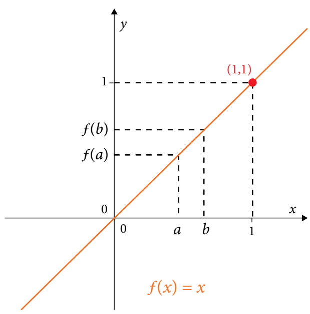
$$\Rightarrow g(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$



Es decir, los puntos (1,1) y (–1,–1) pertenecen tanto a la gráfica de f como a la de g.

b) Estudio de puntos a, b, $\in$ (0,1)

Para los puntos del intervalo (0,1) haremos las siguientes consideraciones:

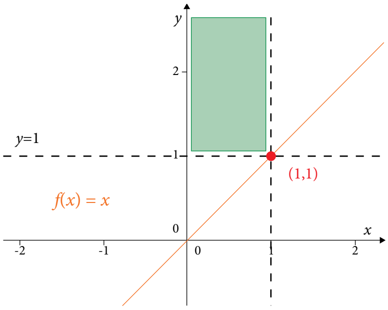


- Sean a, b, $\in (0,1)$ de modo tal que $a < b < 1$. Como $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces, $f(a) < f(b)$, ya que $f(x)$ es creciente.
- Pero, $g(a) = \frac{1}{a}$ y $g(b) = \frac{1}{b}$. Si recordamos que $0 < a < b < 1$, al dividir por $a > 0$ las desigualdades no se alteran, por tanto:

  $$1 < \frac{b}{a} < \frac{1}{a}$$

  Si dividimos ahora por $b > 0$ obtenemos:

  $$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{ab}$$



- Además, $b < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{b}$

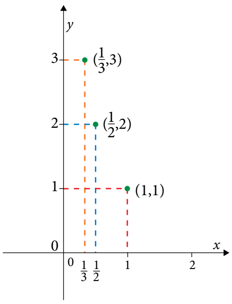
  Entonces $1 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

  Es decir $1 < g(b) < g(a)$
  Por tanto $g(x)$ decrece y se ubica por encima de $y = 1$.

Como ejemplo calculemos algunos puntos para comenzar a trazar la gráfica:

- $x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

- $x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$



Si hacemos x cada vez más pequeño:

- $x = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{100} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$

en general, para n cada vez más grande:

- $x = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{n} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$

Observamos que, a medida que $f(x)$ se hace más pequeño, $g(x)$ se hace más grande. Es decir, si hacemos tender x a cero, $f(x) = x$ también se acercará tanto como deseemos a cero y, por lo tanto, $g(x) = \frac{1}{x}$ tenderá a infinito, esto es, se hará tan "grande" como queramos.

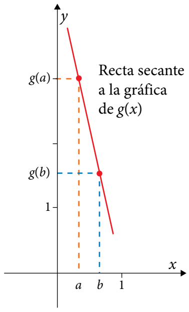
Tomemos ahora dos puntos de $f(x) : (a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tales que $a, b \in (0,1)$ con $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$ y, por lo visto anteriormente, $g(a) > g(b)$.

Además, $b - a > 0$ y $g(b) - g(a) < 0$. Efectivamente:

$$g(b) - g(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab} = -\frac{(b - a)}{ab}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$ es:

$$m = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{\frac{a - b}{ab}}{b - a} = -\frac{1}{ab}$$



Conforme a y b sean más pequeños $g(a) = \frac{1}{a}$ y $g(b) = \frac{1}{b}$ serán cada vez más grandes. Por otro lado, el producto de ab también está acercándose a cero, por tanto, $-\frac{1}{ab}$ se está haciendo "muy grande", es decir, este valor tiende a infinito (negativo).

Luego, como la pendiente de la recta secante a la gráfica de $g(x)$ es $-\frac{1}{ab}$, esta recta se va haciendo cada vez mas paralela al eje y a medida que nos acercamos a $x = 0$. Esto nos lleva a pensar que los puntos de la gráfica de $g(x)$ no atravesarán el eje vertical. Podemos deducir entonces que: $x = 0$ es una asíntota de la gráfica de $g(x) = \frac{1}{x}$.

c) Estudio de puntos a, b, $\in (1,+\infty)$

Ahora consideremos el intervalo $(1,+\infty)$ y sean $a, b \in (1,+\infty)$ tales que: $1 < a < b$, al dividir por $a > 0$ las desigualdades no se alteran y obtenemos:

$$\frac{1}{a} < 1 < \frac{b}{a}$$

de igual manera, si dividimos ahora por $b > 0$ nos queda

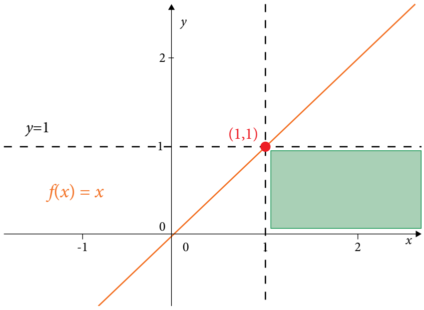
$$\frac{1}{ab} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$$

Luego,

$\left.\begin{array}{l} f(a) = a \\ f(b) = b \end{array}\right\}$ por tanto $1 < f(a) < f(b)$, y f crece y se mantiene por encima de la recta $y = 1$.

$\left.\begin{array}{l} g(a) = \frac{1}{a} \\ g(b) = \frac{1}{b} \end{array}\right\}$ por tanto, $g(b) < g(a) < 1$, g decrece y se mantiene por debajo de la recta $y = 1$.

Por otro lado, si

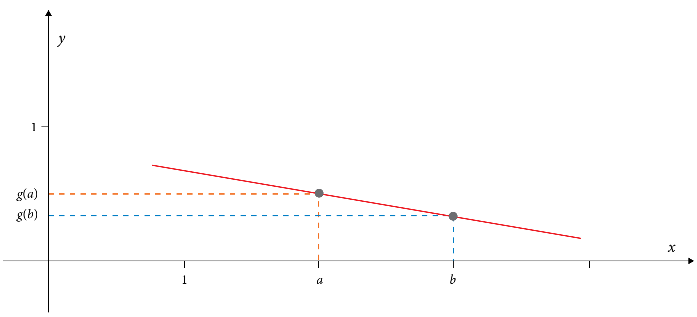


$$x \in (1,+\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow g(x) > 0,$$

es decir, $g(x)$ se mantiene por encima de la recta $y = 0$, luego $0 < g(x) < 1$ para todo $x \in (1,+\infty)$.

Anteriormente vimos que la pendiente de la recta que une dos puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$ es:

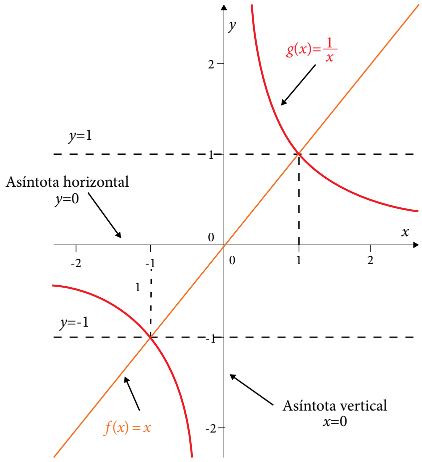
$$m = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = -\frac{1}{ab}.$$



Si ahora hacemos que a y b sean cada vez más grandes, es decir, que ambos tiendan a infinito, la pendiente de esta recta a la gráfica de $g(x)$ tenderá a cero, es decir, será cada vez más horizontal o paralela al eje x. Esto nos hace pensar que los puntos de la gráfica de $g(x)$ no atravesarán la recta $y = 0$. Así, el eje x será una asíntota horizontal de la gráfica de $g(x)$.

Del análisis de las características de $f(x)$, sabemos que f es una función impar. Ahora, como $g(x) = \frac{1}{x}$ entonces $g(-x) = -\frac{1}{x} = -g(x)$, de lo que concluimos que $g(x)$ es impar, por lo tanto, la gráfica de $g(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Entonces, con lo estudiado hasta ahora, estamos en condiciones de trazar la gráfica completa: gráfica de $f(x) = x$ y de su recíproca $g(x) = \frac{1}{x}$.



Analicemos ahora la manera en que se puede construir la gráfica del recíproco de una función arbitraria a partir de su gráfica. Para ello utilizaremos los resultados que obtuvimos en el estudio del recíproco de la función elemental $f(x) = x$.

Generalización de la construcción de $\dfrac{1}{f(x)}$ *a partir de cualquier f(x)*

1) **Signo de** $\dfrac{1}{f(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f(x) > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{f(x)} > 0 \\[2ex] \text{Si } f(x) > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{f(x)} > 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto, se mantiene el signo de $\dfrac{1}{f(x)}$ respecto del signo de $f(x)$.

2) **Puntos invariantes**

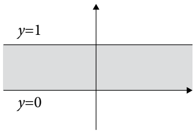
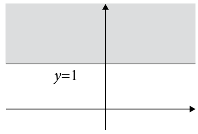
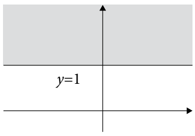
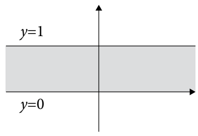
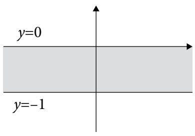
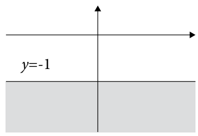
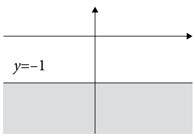
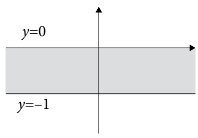
Sabemos que el recíproco de 1 es él mismo.

Por lo tanto, si $f(x) = 1$ para algún $x \in Dom\, f \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = 1$

Lo mismo ocurre con -1.

En conclusión, los puntos de la forma $(x, 1)$ y $(x, -1)$ que pertenecen a la gráfica de $f(x)$, pertenecen también a la gráfica de $\frac{1}{f(x)}$.

Todas las consideraciones anteriores quedan resumidas en la siguiente tabla:

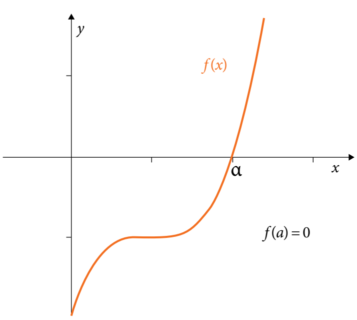
$f(x)$	Significado gráfico	$\frac{1}{f(x)}$	Significado gráfico	Observaciones
$0 < f(x) < 1$		$\frac{1}{f(x)} > 1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por encima de la recta $y = 1$
$f(x) > 1$		$0 < \frac{1}{f(x)} < 1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por debajo de la recta $y = 1$ y por encima del eje x
$-1 < f(x) < 0$		$\frac{1}{f(x)} < -1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por debajo de la recta $y = -1$
$f(x) < -1$		$-1 < \frac{1}{f(x)} < 0$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por encima de la recta $y = -1$ y por debajo del eje x

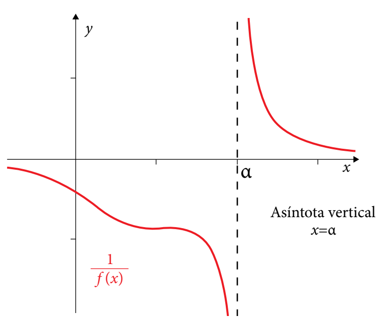
De la tabla anterior se deduce la importancia de graficar las rectas $y = 1$ y $y = -1$, pues dan una primera aproximación de las regiones donde se encontrará la gráfica de $\frac{1}{f(x)}$

3) **Ceros de $f(x)$**

Si existe $a \in Dom\, f$, tal que $f(a) = 0$ entonces $\frac{1}{f(a)}$ no está definida.

Por tanto, un cero de $f(x)$ se convierte en una asíntota de $\frac{1}{f(x)}$

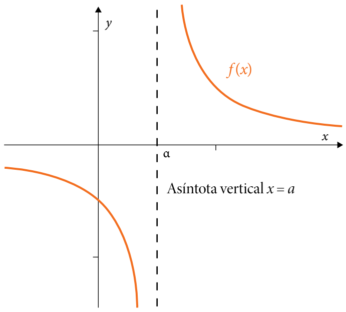


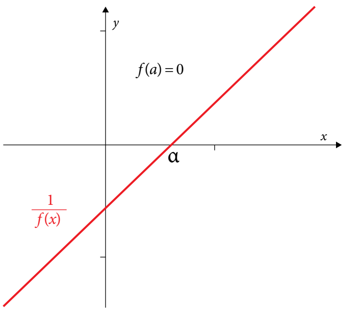


4) **Asíntotas verticales de $f(x)$**

Si $f(x)$ tiene una asíntota vertical en algún x, entonces, $f(x)$ tiende a infinito.

Por tanto, una asíntota vertical de $f(x)$ se convierte en un cero de $\dfrac{1}{f(x)}$

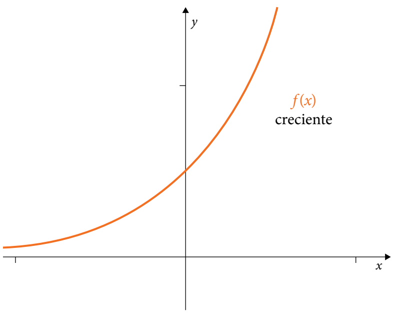


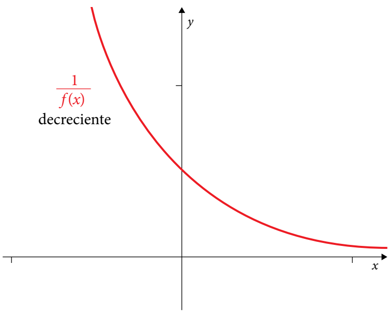


5) **$f(x)$ creciente o decreciente**

$f(x)$ es creciente si y sólo si, para todo $a,b \in Dom\, f$ tales que $a < b$, se cumple que $f(a) < f(b)$. Luego, si $a,b \in Dom\, f$ tales que $a < b$, vimos que $\frac{1}{f(b)} < \frac{1}{f(a)}$, por lo tanto, podemos concluir que:

Si $f(x)$ es creciente $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ es decreciente





Análogamente,

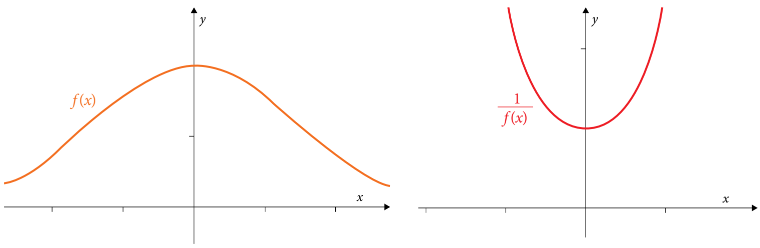
si $f(x)$ es decreciente $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ es creciente.

6) Simetría respecto al eje y, es decir, $f(x)$ es una función par

$f(x)$ es una función par, si y sólo si, para todo $x \in Dom\, f$ se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Vemos que $\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)}$ y podemos entonces concluir lo siguiente:

Si $f(x)$ es una función par, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es una función par. Por lo tanto, $\frac{1}{f(x)}$ también es simétrica respecto al eje y.



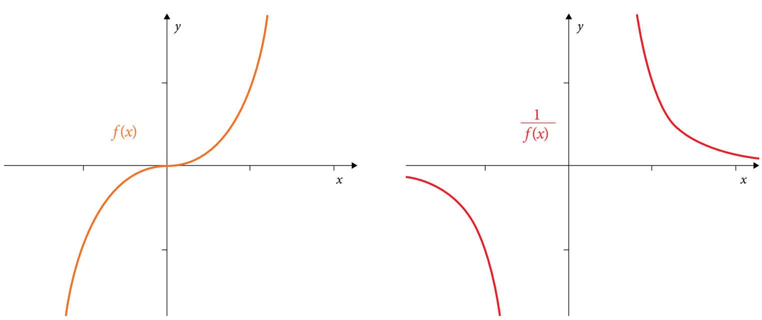
Funciones pares

7) Simetría respecto al origen de coordenadas, es decir, $f(x)$ es una función impar

$f(x)$ es una función impar, si y solo si, para todo $x \in Dom\, f$ se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Luego $\frac{1}{f(-x)} = -\frac{1}{f(x)}$ y podemos entonces concluir que:

Si $f(x)$ es una función impar $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ es una función impar. Por lo tanto, $\frac{1}{f(x)}$ también es simétrica respecto al origen de coordenadas.

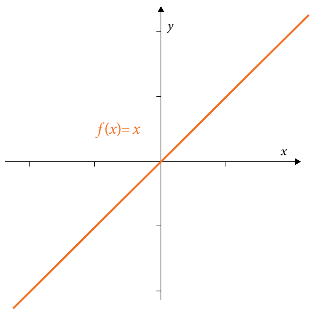


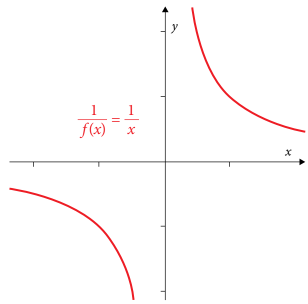
Funciones impares

8) **Continuidad de $f(x)$**

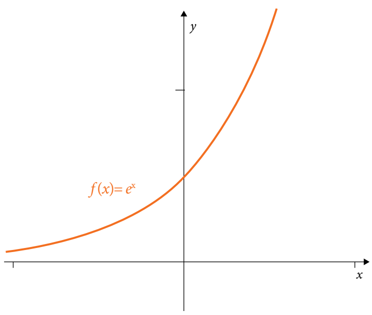
Que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio, no implica que $\frac{1}{f(x)}$ también lo sea. En efecto, puede ocurrir que:

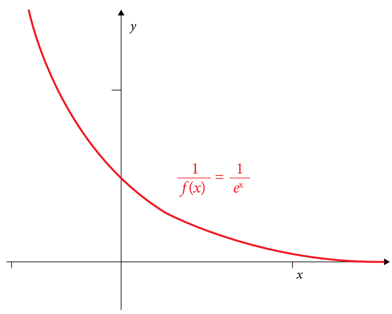
- $f(x)$ sea continua, como por ejemplo $f(x) = x$, pero su recíproca ser discontinua, tal es el caso de $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$. Observemos sus gráficas:





- Puede ocurrir que tanto $f(x)$ como $\frac{1}{f(x)}$ sean continuas en su dominio, por ejemplo, $f(x) = e^x$ y $\frac{1}{f(x)} = e^{-x}$. Observemos sus gráficas:





En conclusión, podemos asegurar que:

- Si $f(x) \neq 0$, para todo $x \in Dom\, f$, y $f(x)$ es continua entonces $\frac{1}{f(x)}$ es continua.

- Si $f(x) = 0$ para algún $x \in Dom\, f$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es discontinua.

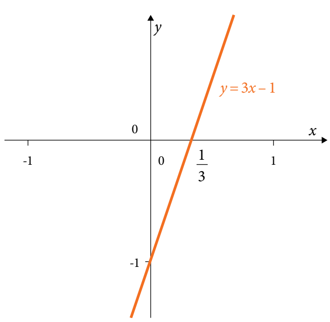
Consideramos que la pertinencia de este tipo de problemas respecto a su inclusión en los programas de precálculo radica en que dotar al alumno de un buen manejo del lenguaje gráfico facilita la comprensión y apropiación de nuevos conceptos de cálculo. En particular, el estudio del recíproco de una función permite reflexionar acerca de ciertas nociones, como asíntotas, ceros, máximos y mínimos, continuidad, y sobre lo que sucede con ellas al aplicar esta operación.

Al resolver este tipo de ejercicios, el alumno se ve obligado a pensar qué sucede ante, por ejemplo, un cero o asíntota. Este hecho lo acerca a conceptos de límite y sucesiones sin estar trabajando con ellos de manera explícita. Debe analizar lo que ocurre cuando $f(x)$ se hace cada vez más pequeña (cero), o cada vez más grande (asíntotas) y al aplicarle el recíproco; y a manejar ideas de "tiende a…", "se acerca a…". Por tanto, contribuye a formar una "base" donde sustentar nociones tales como límite, continuidad, máximos y mínimos, etcétera, inherentes al cálculo. Lograr un pasaje fluido y espontáneo entre estos dos lenguajes (gráfico y analítico) permite una mayor comprensión de las ideas subyacentes.

Resolución de desigualdades

Es innegable que la dificultad técnica que se presenta al resolver desigualdades obstaculiza su comprensión y su enseñanza y reduce su presentación escolar a unos cuantos ejemplos "complejos" a fin de completar el programa establecido. Por otra parte, las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla una minoría de estudiantes no contribuyen, sustancialmente, a un posterior estudio del cálculo. Nuestra estrategia para abordar en la escuela este tema estriba en el cambio de centración del contexto protagónico de la discusión, es decir, iniciamos el tratamiento en el contexto gráfico y hacemos una traslación hacia el contexto algebraico con el fin de apoyar argumentaciones o construcciones gráficas. También involucramos el contexto numérico usando la calculadora para conjeturar soluciones e ir estableciendo márgenes de aproximación que propician el fortalecimiento de la intuición numérica de los estudiantes. En lo que sigue veremos algunos ejemplos que el lector puede consultar en Farfán (2013), para mayores detalles.

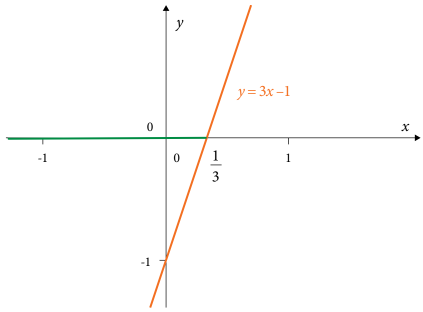
El problema de resolver una desigualdad de incógnita x radica en encontrar todos los números reales que, al sustituirlos por x, verifican la desigualdad dada. Tales números son las soluciones de la desigualdad, y forman el conjunto de soluciones que generalmente es un intervalo. Hagamos una analogía con la resolución de ecuaciones.



Resolver la ecuación $3x - 1 = 0$ es encontrar el valor de "x" para el cual el término $3x - 1$ es nulo; el problema planteado en una gráfica se interpreta como el de encontrar la intersección de la recta $y = 3x - 1$ con el eje x.

El valor de x requerido es $1/3$, es decir que para dicho valor el término $3x - 1$ se anula; en la gráfica, para ese valor de x la recta y el eje coinciden y la solución se expresa como $x = 1/3$.

Al introducir el término "desigualdad" se introducen los símbolos "$<$" (menor que), "$>$" (mayor que), "$\leq$" (menor o igual que) y "$\geq$" (mayor o igual que), que permiten que la solución sea un número, como en el caso de las ecuaciones, o bien, un conjunto de números e incluso varios conjuntos. De modo que al solicitar la solución de la desigualdad $3x - 1 < 0$, observamos en la gráfica que para todos los números del eje x situados a la izquierda de $1/3$ (es decir, menores que $1/3$) los valores del término $3x - 1$ están por debajo del eje x (es decir, son menores que cero), por lo que la solución requerida es un conjunto de números, a saber, el constituido por todos los números reales que sean estrictamente menores que $1/3$. Así, la solución es el intervalo $(-\infty, 1/3)$.



Reflexionemos sobre el procedimiento anterior: hemos establecido una comparación entre la gráfica de la recta $y = 3x - 1$ y el eje de las x cuya ecuación es $y = 0$; la comparación fue dada por el símbolo "$<$" y nos preguntamos ¿a partir de qué número, la gráfica de la recta $y = 3x - 1$ está por debajo de la gráfica de la recta $y = 0$?

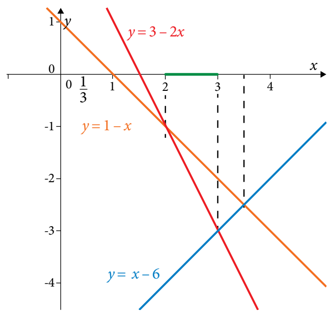
Hemos traducido "$<$", usado en la expresión algebraica, por "debajo de"; y se puede inferir la traducción de "$>$" por "arriba de" en el contexto gráfico, del mismo modo en que la igualdad se traduce como intersección (coincidencia).

De este ejemplo observamos que, en general, a diferencia de las ecuaciones, al resolver una desigualdad nos vemos obligados a exhibir un conjunto de números y que, en el contexto gráfico que usaremos en este escrito como ambiente de trabajo, resolver la desigualdad será localizar a partir de qué número (sobre el eje de las x) la comparación inducida por los símbolos ("$<$", "$>$", "$\leq$", "$\geq$") da lugar a la comparación ("debajo de", "arriba de", "debajo de y en la intersección", "arriba de y en la intersección") de los lugares geométricos involucrados.

Resolver la desigualdad $1 - x \geq 3 - 2x \geq x - 6$

Como antes, graficamos las rectas $y = 1 - x$, $y = 3 - 2x$ e $y = x - 6$ en un mismo sistema de ejes.

La gráfica de $y = 1 - x$ está por encima de la gráfica de la recta $y = 3 - 2x$ a partir del punto de intersección cuya abscisa es 2. En tanto que la gráfica



de la recta $y = 3 - 2x$ estará por arriba de la recta $y = x - 6$ hasta el punto de intersección que tiene por abscisa 3; después de tal valor la situación se invertirá, así que de ambas partes tenemos que la solución es el intervalo $[2,3]$, que también puede expresarse como el conjunto $(-\infty,3]\cap[2,\infty)$.

Reflexiones finales

La enseñanza tradicional sostiene que los aprendizajes se dan como resultado de "buenas prácticas" de enseñanza del docente, quien evalúa los aprendizajes a través de mecanismos de aprobación o reprobación de determinado curso; se confunde acreditar con aprender. En contraparte, los enfoques constructivistas nutren la idea de que aprender matemáticas requiere de su construcción por parte del estudiante, y que el aprendizaje se da con éxito cuando se logra poner en funcionamiento para resolver ciertas tareas en determinadas situaciones.

Desde la perspectiva de la teoría socioepistemológica se hace necesario que la gestión didáctica responda a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los escenarios (culturales, históricos e institucionales) que requiere la actividad matemática; para ello, esta actividad se debe apoyar en los propios procesos mentales del estudiante: sus conjeturas, sus procesos heurísticos, sus ensayos y exploraciones; de esta manera se abre la posibilidad de que la intuición sirva como punto de partida para el trabajo en la clase (Cantoral, 2013). Pero ¿cómo asegurar que se genera el ambiente propicio para esto? Respecto de la situación de aprendizaje se asegura que:

> …suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entiendan efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente… dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje… pues la respuesta habrá de ser construida (Cantoral, 2013: 201).

Desde esta mirada se puede asegurar que un sujeto (individual o colectivo) no siempre está en situación de aprender; las situaciones de aprendizaje se deben propiciar, proponiendo una situación problema que enfrente al sujeto a un escenario en el que deba poner en juego los saberes que se requieren; se dice entonces que el individuo está en situación de aprendizaje cuando entra en conflicto, es decir, cuando el diseño provoca que su respuesta inicial a la tarea encomendada sea errónea y el mismo diseño lo hace percatarse de ello (Reyes, 2011).

La propuesta de diseño presentada busca construir un lenguaje gráfico de funciones extenso y rico en significados para quien aprende, que permita ir más allá de los procedimientos y algoritmos propios del álgebra y de la geometría analítica para dar paso a argumentos visuales a partir del uso de la gráfica al resolver situaciones problema, específicamente, las desigualdades.

Este tipo de tratamiento de las funciones, donde se incorporan fuertemente los elementos visuales, permite el tránsito entre los distintos contextos de la función: algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal. Esta herramienta le sirve al docente como nuevo punto de partida para que realicen nuevas situaciones en el aula, pues al conocer nuevas investigaciones relacionadas con los diferentes temas, esto contribuirá a que se promueva una actitud de liderazgo, confianza y mejora en sus prácticas para la enseñanza, favorecerá el empoderamiento del docente (Reyes y Cantoral, 2014) y, por ende, el enriquecimiento de la profesionalización docente.

Referencias

Artigue, Michèle (1992), "Ingénierie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématique*, vol. 9, núm. 3, pp. 281-308.

Artigue, Michèle (1998), "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 1, núm. 1, pp. 40-55.

Bachelard, Gaston (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, París, Ed. Vrin.

Brousseau, Guy (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 33-112.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*, Barcelona, Gedisa.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", *Epsilon*, núm. 42, pp. 353-369.

Chevallard, Yves (1991), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires, Aique.

Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Joseph Gascón (1995), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ICE-Horsori.

Farfán, Rosa María (2012), *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*, Barcelona, Gedisa.

Farfán, Rosa María (2013), *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*, México, SEP-Subsecretaría de Educación Media Superior.

Farfán, Rosa María, Marcela Ferrari y Gustavo Martínez (2000), "Lenguaje algebraico y pensamiento funcional", en Ricardo Cantoral (coord.), *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas, pp. 89-144.

Morales, Astrid y Francisco Cordero (2014), "La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17, núm. 3, pp. 319-345.

Reyes-Gasperini, Daniela (2011), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 48, pp. 360-382.

Sierpinska, Ana (1992), "On Understanding the Notion of Function", en Ed Dubinsky y Guershon Harel (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Washington, MAA Notes 25, pp. 23-58.

El desarrollo de argumentos visuales

Una experiencia de intervención didáctica con docentes de Oaxaca

Ricardo Cantoral* | Mario Adrián Caballero-Pérez** | Gloria Angélica Moreno-Durazo***

Presentamos en este artículo, en forma sucinta y sistemática, una experiencia con docentes en formación de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca. Narramos los aspectos centrales de su participación en el "Seminario de precálculo desde un enfoque visual", cuyo objetivo fue desarrollar argumentos gráficos para el análisis de los comportamientos, tanto globales como locales, de funciones reales de variable real. Las actividades realizadas en este seminario se fundamentan en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, en la cual se asume que es mediante el desarrollo de *prácticas* que se significan los *objetos matemáticos* formales. Los hallazgos obtenidos por los profesores participantes se refieren a la relación entre forma y visualización, así como a la anticipación, estimación y predicción con apoyo en el manejo adecuado de formas gráficas de funciones algebraicas.

Palabras clave

Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria

Socioepistemología

Matemática educativa

Visualización

Función algebraica

* Profesor-investigador en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN) (México). Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV. Investigador nacional, nivel III. Director de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. Fundador de un campo de investigación sobre los procesos de construcción social del conocimiento matemático avanzado y de su difusión institucional, que se ha acuñado como teoría socioepistemológica de la matemática educativa. CE: rcantor@cinvestav.mx

** Estudiante del Programa de Doctorado en Matemática Educativa del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV- IPN) (México). Candidato a Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Línea de investigación: pensamiento y lenguaje variacional en la construcción social del conocimiento matemático. CE: macaballero@cinvestav.mx

*** Estudiante del Programa de Doctorado en Matemática Educativa del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV- IPN) (México). Candidata a Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Línea de investigación: pensamiento y lenguaje variacional en la construcción social del conocimiento matemático. CE: gamoreno@cinvestav.mx

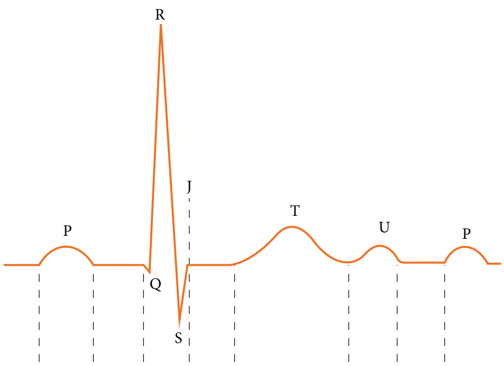
Introducción

Uno de los objetivos mayores de la enseñanza de las matemáticas radica en alcanzar la meta, si bien ambiciosa, de dominar los procesos y conceptos matemáticos para tratar críticamente con la vida del alumnado, es decir, desarrollar entre el estudiantado una manera matemática de pensar que permita interpretar al mundo y sus relaciones. En este sentido, más que reducir la enseñanza a la repetición de algoritmos, procesos y conceptos, se debe buscar significarles mediante el uso en situaciones realistas para quien está en proceso de aprender.

La noción matemática de *función* se encuentra en el centro mismo de esta misión, pues es con ellas, y a través de ellas, que representamos una gran cantidad de relaciones causales entre variables asociadas con fenómenos.

Es posible interpretar el desempeño cardiovascular mediante el análisis e interpretación de un electrocardiograma, y desde ahí, tomar decisiones sobre el estado de salud de un paciente. Dicho electrocardiograma puede obtenerse a partir de una colección articulada de gráficas de funciones elementales (Gómez, 2008), y como lo ha estudiado Moreno-Durazo en diversas de sus publicaciones, en su interpretación se involucran las prácticas de *comparación*, *seriación y estimación* como base para el estudio de los cambios entre estas gráficas (Moreno-Durazo y Cantoral, 2015, 2016; Moreno-Durazo, 2016).

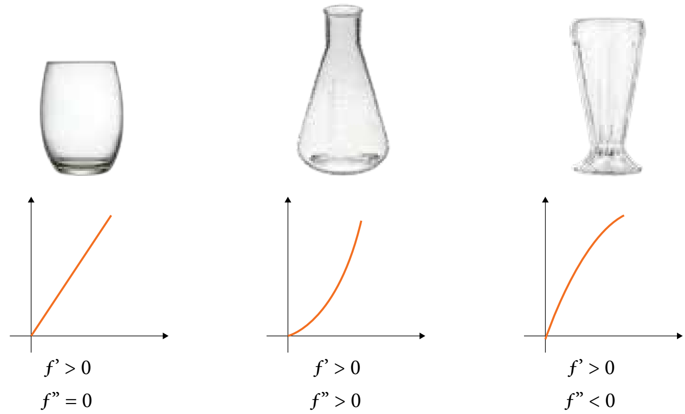
Figura 1. Ondas en el ciclo cardiaco completo



Fuente: *Marriott's practical electrocardiography*, Wagner y Strauss, 2014: 16 (trad. propia).

Del mismo modo, es posible analizar el comportamiento visual de una curva mediante diversas acciones relativas al estudio de la variación, como se señala en los estudios de Caballero (Caballero-Pérez, 2013, 2016; Caballero-Pérez y Cantoral, 2016), lo que permite establecer relaciones funcionales en fenómenos como el llenado de recipientes mediante una correspondencia entre el concepto de derivada y el comportamiento gráfico del fenómeno. La forma de una gráfica está determinada por la naturaleza del fenómeno de estudio. Ambos enfoques permiten tratar a las formas gráficas de una manera novedosa, misma que se puso de manifiesto en este

Figura 2. Derivadas de una función en el llenado de recipientes



Fuente: elaboración propia.

diseño de intervención para el desarrollo profesional docente entre profesores de enseñanza secundaria.

Estos dos elementos, conjuntamente con la investigación realizada con anterioridad (Farfán 2013; Montiel, 2013), permitieron realizar un diseño de intervención didáctica con fines de predicción, donde las gráficas adquirieron un significado novedoso que amplió el discurso del aula de matemáticas. La visualización y la argumentación correspondiente nos permitieron alcanzar éxitos notables, como veremos a continuación.

De manera tradicional, la temática principal de las matemáticas previas al cálculo se enfoca en el estudio de las relaciones funcionales mediante su definición, clasificación y propiedades; esto lo podemos observar en libros clásicos de precálculo (Stewart *et al.*, 2001). La educación secundaria incluye parte de este estudio en el eje "manejo de la información", donde se propone el tratamiento de relaciones de proporcionalidad, lineales y cuadráticas; en particular, se promueve el manejo de sus representaciones algebraica, gráfica y numérica, además de su aplicación en contextos diversos como la física, la química y la biología, entre otros (SEP, 2013).

Los procesos de enseñanza escolares usualmente tratan el tránsito de la representación algebraica a la gráfica a través de la representación numérica (método de tabulación); esto es, dada la expresión analítica de una función, se evalúan algunos valores, se localizan en un plano cartesiano y, finalmente, se unen los puntos mediante trazos curvos o rectos. La implementación de estos esquemas de graficación impide el desarrollo de procesos de visualización y estimación de comportamientos de la función, pues reduce el tratamiento sobre la gráfica a un procedimiento algorítmico, sin profundización; más aún, la tabulación como recurso único ante la graficación impide la significación de la función (Cantoral, 2013).

Ahora bien, planteamos en el seminario con los profesores de la MEMES un escenario que permitiera la profundización tanto de la matemática escolar de la secundaria (nivel educativo del que son profesores), como de la matemática avanzada. Para ello, tomamos como referente principal la propuesta de Cantoral y Montiel (2014), que propone el estudio de funciones reales de variable real desde un enfoque gráfico y visual con el fin de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático; específicamente, sobre el desarrollo de la visualización y estimación de formas gráficas de funciones. De esta manera, el análisis gráfico que se promueve no se limita a la manipulación algebraica, sino que a partir de él se generen argumentos visuales que propicien la significación sobre la expresión analítica.

En particular, en el seminario se propició el desarrollo de argumentos que permitieran la estimación de formas gráficas de funciones polinomiales del tipo

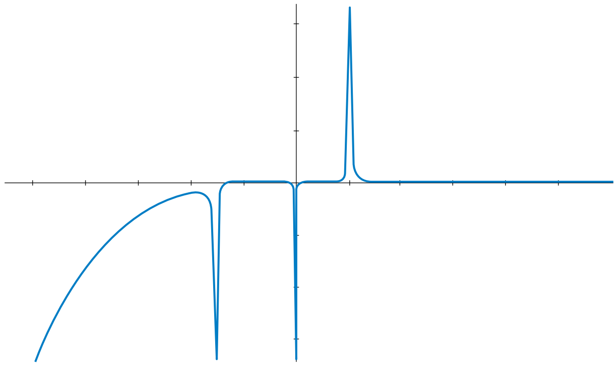
$$f(x) = (x - a)^m (x - b)^n \ldots (x - c)^p$$

y funciones racionales del tipo

$$g(x) = \frac{(x-a)^m (x-b)^n \ldots (x-c)^p}{(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \ldots (x-\gamma)^t}$$

Nos interesaba la construcción de argumentos que justificaran, por ejemplo, por qué la gráfica de la Fig. 3 no puede representar una función racional.

Figura 3. ¿Esta gráfica representa una función racional?



Fuente: elaboración propia.

Fundamento teórico del Seminario de précalculo desde un enfoque visual

El pensamiento y lenguaje variacional (PyLVar) es una línea de investigación desarrollada a la luz de la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, cuyo objetivo es el estudio de las formas culturales de apropiación del *cambio* con fines *predictivos*. Este objetivo exige de una estructuración de las prácticas que acompañan a los objetos matemáticos, relativas al estudio del cambio y la variación. Diversas investigaciones reportan que el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional requiere tanto de la noción de predicción como del manejo amplio y rico en significados sobre un universo de formas gráficas (Cantoral y Farfán 1998; Cantoral *et al*., 2005).

Derivado de los proyectos desarrollados bajo el PyLVar, se han podido caracterizar estrategias y argumentos variacionales indispensables para la predicción. En consecuencia, se han desarrollado una serie de situaciones de aprendizaje para la mejora educativa, tanto en el aula y la escuela, como en la vida misma. Por ejemplo, Farfán (2013) plantea, para el establecimiento de un isomorfismo entre el lenguaje algebraico y el gráfico, la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números; para ello, propone el análisis gráfico a partir de las transformaciones de reflexión, traslación, contracción y dilatación.

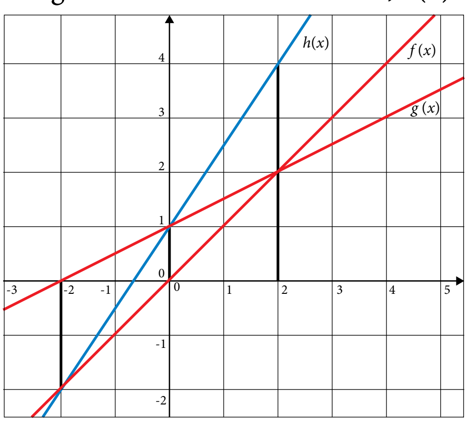
Ahora bien, en las situaciones de aprendizaje propuestas para el seminario con los profesores oaxaqueños, se planteó el estudio de funciones algebraicas tomando a la función prototípica $y=x$ como base para la construcción de estas funciones. Es decir, el hecho de concebir a la gráfica como un ente matemático susceptible de ser operado permitió partir del entendimiento de gráficas de funciones prototípicas a la generación de universo gráfico (Cantoral y Montiel, 2014).

Estructura del seminario

Las primeras sesiones del seminario se enfocaron en la construcción de argumentos sobre la articulación entre el lenguaje gráfico y el algebraico para funciones lineales, cuadráticas y cúbicas; todas éstas, excepto la cúbica, son tratadas en el nivel de secundaria. Se parte de la expresión $y = x$ para construir, a través de la movilización del cuerpo, los giros y traslaciones de la recta, de manera que, en la expresión $y = mx + b$ se significa al parámetro m como aquello que gira o modifica la pendiente de la recta, y el parámetro b como aquello que la traslada sobre el eje y.

La profundización en la función lineal se realiza mediante la suma de funciones, lo que conceptualmente refiere a la operación numérica entre puntos específicos de las gráficas. Esto es, el método de sumar dos gráficas no implica sumar punto a punto todo el dominio de la función, sino que la atención se centra en puntos particulares de las gráficas que presentan una relación particular con los valores de la suma, lo que los autores denominan

Figura 4. Suma gráfica de funciones lineales, $h(x) = f(x) + g(x)$

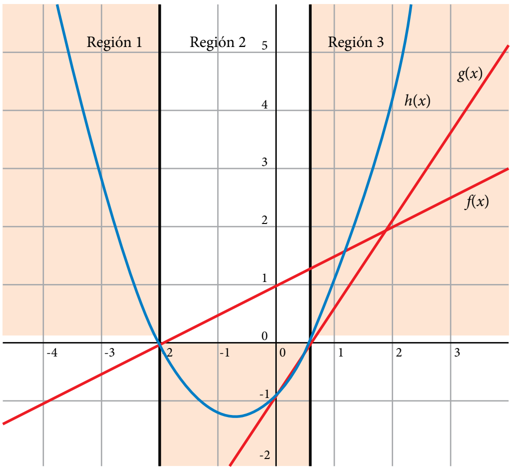


Fuente: elaboración propia.

análisis local de los puntos. Por ejemplo, para la suma gráfica de dos rectas se determina la raíz de cada recta, y al sumarse las ordenadas en esos puntos es necesario considerar solamente una de ellas (Fig. 4).

Las funciones cuadráticas y cúbicas se construyen a partir de la multiplicación de rectas. Para realizar el bosquejo de esta multiplicación se identifican las regiones en el plano por las que la nueva función debe cruzar. Por ejemplo, en la Fig. 5 se muestra el producto de las rectas $f(x)$ y $g(x)$; primeramente, las regiones en las que se "partirá" el plano cartesiano se identifican a partir de la raíz de cada función y se determina, con base en el signo de las ordenadas de las funciones en cada región, la zona por la que debe cruzar la función resultante; por ejemplo, en la región 2, los puntos de $f(x)$ tienen valores de ordenada positivos, y los puntos de $g(x)$ tienen valores de ordenada negativos, por tanto, $h(x)$ tendrá valores de ordenada negativos. A este método se le agregan consideraciones como el hecho de que la función producto conserva las raíces de las funciones que se multiplican.

Figura 5. Multiplicación de rectas, $h(x) = f(x)\ g(x)$



Fuente: elaboración propia.

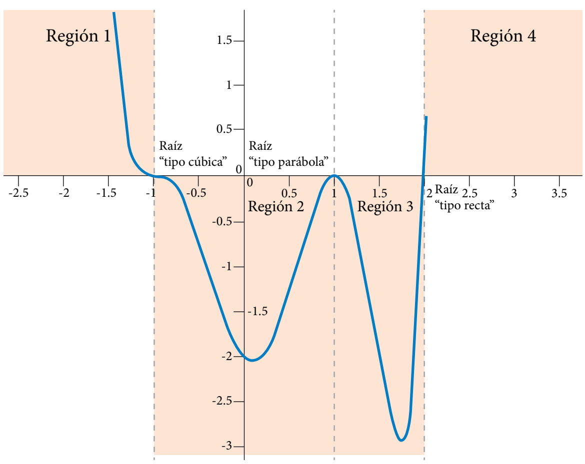
Una vez construidas las funciones polinomiales de grado 2 y 3, se tratan problemas de reversibilidad para profundizar en ellas, mediante problemas como: "dada la gráfica de una función cuadrática determinar el par de rectas que se deben multiplicar para generarla". Además, se recurre de nuevo a la movilización corporal para describir los efectos como "alargamiento", "abrir o cerrar la parábola", "aplanar" y "trasladar", que se provocan en la gráfica de las funciones en la movilización de los parámetros sobre las expresiones algebraicas de funciones cuadráticas ($y = ax^2 + bx + c$, $y = A(x - B)^2 + C$ y funciones cúbicas ($y = A(x - B)^3 + C$).

Es importante enfatizar que el interés principal no se reduce al tratamiento de las expresiones algebraicas y la significación de sus parámetros, como se hace en muchos trabajos educativos, sino que éstas son resultado de los argumentos gráficos generados ante cuestiones como ¿cualquier función cúbica se puede generar al modificar los parámetros de $y = (x - a)^3 + c$? Lo anterior es atendido por los profesores con argumentos como "ni la traslación horizontal o vertical, ni el 'estiramiento' de la gráfica $y = x^3$ generan una función cúbica con raíz real de multiplicidad dos, por lo tanto, no es posible generar cualquier función cúbica mediante el modelo $y = (x - a)^3 + c$".

Hasta este momento, los argumentos y las significaciones construidas se relacionan con la matemática del nivel educativo en el que laboran los profesores y, además, son estos argumentos la base para el análisis gráfico de las funciones racionales y la generalización sobre las polinomiales. Previo al tratamiento de estas funciones, se requiere de una generalización sobre el comportamiento gráfico de las funciones del tipo $y = x^n$; para n par, la forma de la gráfica se parecerá a la parábola $f(x) = x^2$, con la diferencia de que entre mayor sea el valor de n, la gráfica tenderá a pegarse más al eje horizontal, y para el caso de n impar, para valores grandes tenemos que la forma de la función se asemeja al de la función $f(x) = x^3$, con la diferencia de que la zona central, cerca del punto de inflexión, tiende a pegarse cada vez más al eje horizontal.

La visualización y la estimación de formas gráficas para funciones polinomiales toman como base las gráficas "tipo parábola" y "tipo cúbica", junto con la forma recta de las funciones lineales. Por ejemplo, en la Fig. 6 se muestra la gráfica de la función $f(x) = (x - 2)(x - 1)^2(x + 2)^3$, la cual es de grado par y, por tanto, el comportamiento global de la gráfica será de "tipo parábola". Además, la forma de corte en las raíces depende del grado del monomio del que surja: en el caso de la raíz $x = 2$ la forma de corte será de "tipo lineal"; en $x = 1$ el factor tiene un exponente de grado par, por lo que el corte con el eje horizontal es de "tipo parábola"; y finalmente, en $x = -2$ el factor correspondiente es de grado impar mayor a 1, por lo que el corte con el eje horizontal es de "tipo cúbica".

Figura 6. Gráfica de $f(x)=(x-2)(x-1)^2\ (x+2)^3$



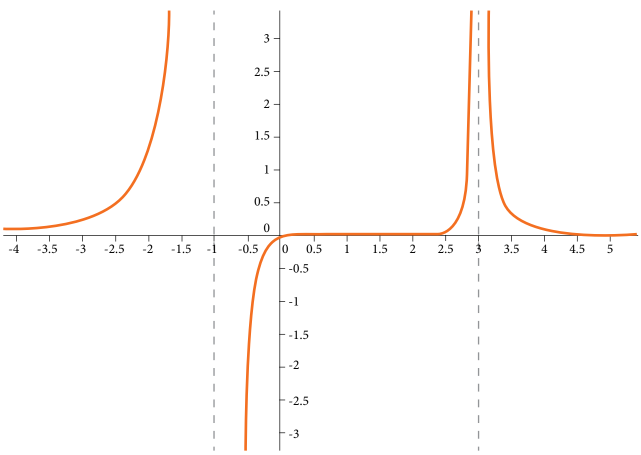
Fuente: elaboración propia.

En la visualización y estimación de formas gráficas de funciones racionales se conjunta todo lo mencionado anteriormente; además, se deben considerar casos en los que el grado del polinomio del denominador sea mayor al grado del polinomio del numerador. Para ello, analizamos el comportamiento de funciones del tipo $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

De manera que, si consideramos la función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, las raíces de $P(x)$ representan las raíces de $f(x)$, mientras que las raíces de $Q(x)$ representan los puntos donde $f(x)$ se indefine. Es así que, por ejemplo, en el bosquejo de $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x+1)^3(x-3)^2}$ (Fig. 7), se tiene el siguiente análisis: dado que el grado del polinomio del numerador es tres y el denominador es seis, y además el coeficiente de f es positivo, el grado global de la función es del tipo $\frac{1}{x^n}$ positivo e impar, por lo que los "extremos" de la gráfica se orientarán ambos hacia la parte positiva del eje vertical.

En $x = -1$ el factor correspondiente en el denominador es impar, por lo que la gráfica se orientará en direcciones opuestas de la asíntota, en $x = 0$ la raíz tiene un factor de grado 1, por lo que el corte en el eje x será de "tipo recta", en $x = 2$ será de "tipo parábola" por tener un factor de grado 2 en el numerador, y en $x = 3$ la asíntota tiene un factor de grado par, por lo que la gráfica en esa zona se orientará hacia la misma dirección. Finalmente, una vez determinado el comportamiento que tendrá la gráfica en las raíces y asíntotas, se analizan las regiones para saber dónde se ubican los puntos de la gráfica.

Figura 7. Gráfica de $f(x)=\dfrac{x(x-2)^2}{(x+1)^3(x-3)^2}$



Fuente: elaboración propia.

La profundización en esta segunda parte del seminario (análisis del comportamiento gráfico de funciones racionales y generalización de las polinomiales), se lleva a cabo con problemas de reversibilidad. Por ejemplo, dada la gráfica de una función algebraica, proporcionar la expresión algebraica, o dada la expresión proporcionar la gráfica de la función; esto mediante análisis sobre el comportamiento de las funciones de manera global y local.

Resultados de la experiencia

Hablamos de los resultados del seminario con relación a las respuestas de los profesores en actividades de análisis y construcción de gráficas de funciones presentes en el texto de Cantoral y Montiel (2014), donde se puede observar el tipo de argumentos construidos. En particular, centramos la atención en actividades que precisan el análisis de funciones racionales del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios, pues son las que articulan las discusiones realizadas a lo largo del seminario. Específicamente, mostramos las respuestas de los profesores a tres tipos de actividades: el bosquejo de la gráfica con base en las características de la función, proponer la expresión analítica dada su gráfica y el bosquejo de la gráfica de una función con base en la expresión analítica. En cada caso enfatizaremos el tipo de análisis y argumentos generados por los profesores.

Bosquejo de la gráfica con base en las características de la función

Una de las actividades que se plantearon en la parte final del seminario fue bosquejar la gráfica de una función una vez conocidas algunas de sus características, por ejemplo, el número de raíces y su multiplicidad, las asíntotas verticales y el "tipo de asintoticidad" (conservan la forma global de la función $y = \frac{1}{x}$ o $y = \frac{1}{x^2}$). Una de estas actividades se plantea en la Tabla 1:

Tabla 1. Características de una función racional

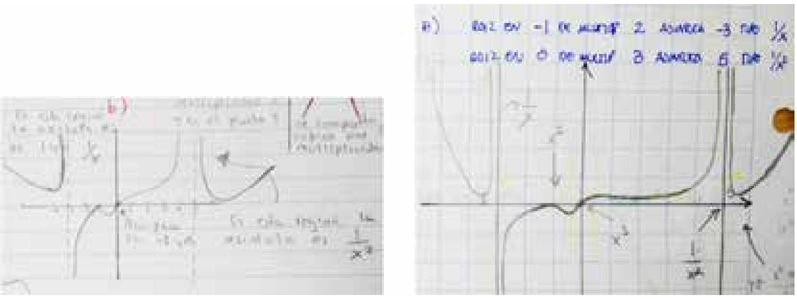
Realiza el bosquejo de la gráfica de la función racional con las siguientes características:			
Raíz	Multiplicidad	Asíntota	Multiplicidad
$x = 1$	2	$x = -3$	1
$x = 0$	3	$x = 5$	2

Fuente: Cantoral y Montiel, 2014.

Responder esta actividad requería del análisis local de los puntos dados, aspecto que los profesores retoman satisfactoriamente al relacionar la multiplicidad de las raíces con el tipo de comportamiento de la gráfica; por ejemplo, ellos mencionan que en las de multiplicidad 2 la función se comporta como parábola, mientras que en las de multiplicidad 3 se comporta como cúbica; en cuanto a las asíntotas, determinan que en la raíz de multiplicidad impar se comporta como la función $\frac{1}{x}$, y en las de multiplicidad par como la función $\frac{1}{x^2}$; lo cual puede observarse en la Fig. 8.

Ahora bien, además del análisis local se precisa el análisis global con base en el grado de la función, con el fin de determinar el comportamiento de la función en los extremos, cuando la variable independiente tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Si bien el bosquejo de los profesores presentado en la Fig. 8 es correcto, el análisis global no es explícito en su procedimiento; esto no significa que no realicen dicho análisis, pues como veremos en los demás ejemplos, para otras actividades sí lo explicitan. Consideramos que esto puede

Figura 8. Bosquejo de profesores dadas las condiciones sobre la función



A B

Fuente: extracto de la tarea entregada por los profesores.

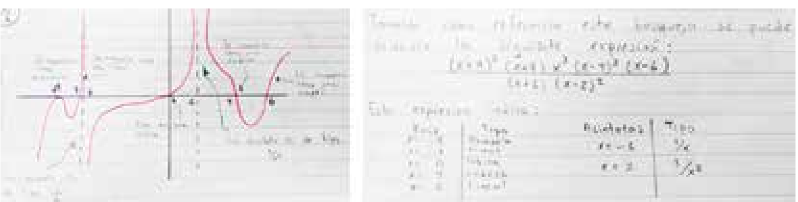
deberse, o bien a la forma de presentar la información de las funciones, o al hecho de que ellos mismos ya no requieren hacerlo explícito, dado que ésta fue una actividad al final del seminario.

Proponer la expresión analítica dada la gráfica de una función

Otra actividad que se trabajó fue construir la expresión analítica a partir de la gráfica de una función racional. Por ejemplo, observamos en la Fig. 9 que el profesor analiza cada uno de los puntos característicos de la gráfica (raíces y asíntotas) para determinar el tipo de comportamiento en cada uno. Con base en ese análisis establece la expresión analítica de la función, apoyándose en una relación del tipo de comportamiento en los puntos característicos con la multiplicidad que tendría el factor correspondiente.

Cabe señalar que, formalmente, esa multiplicidad que señalan puede ser de cualquier grado en el caso de $n > 1$, pero los profesores limitan estos valores entre 1 y 3. Más que a un descuido o a una falta de comprensión, esto se debe a que en el curso se hizo énfasis en caracterizar los comportamientos a partir de formas gráficas básicas, más que en determinar con precisión los exponentes. En ese sentido, la propuesta del profesor se considera correcta, ya que su modelo expresa el tipo de comportamiento gráfico.

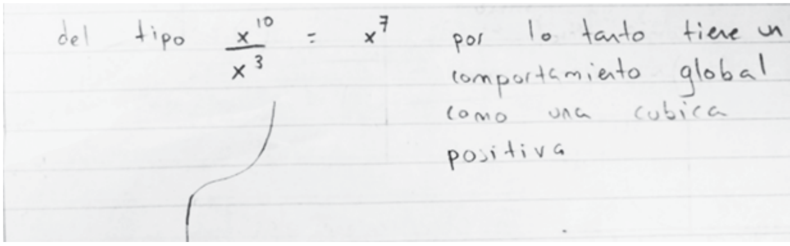
Figura 9. Análisis de los comportamientos locales de una función racional



Fuente: extracto de la tarea entregada por los profesores.

Asimismo, el análisis local de las raíces y asíntotas que permiten al profesor establecer la expresión analítica se complementa con el análisis global. El profesor establece que dados los exponentes que él propone, la expresión

Figura 10. Análisis del comportamiento global de una función racional



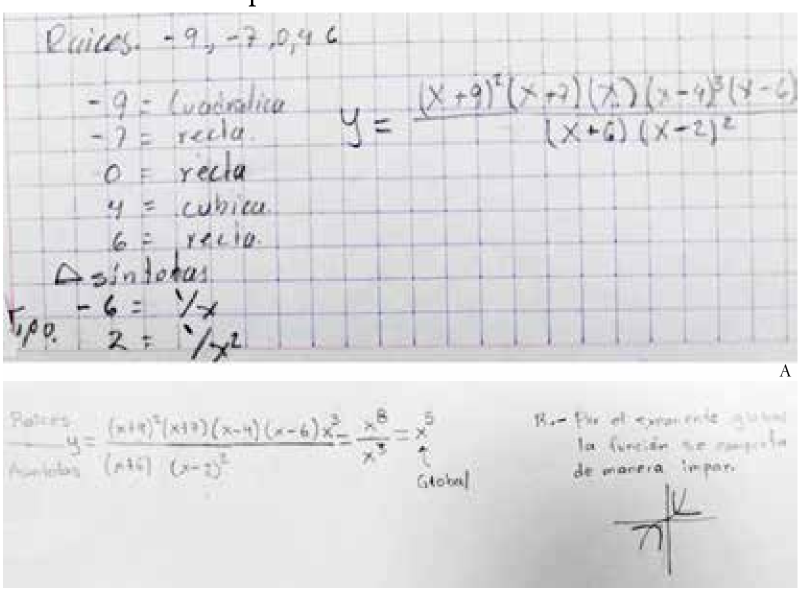
Fuente: extracto de la tarea entregada por los profesores.

analítica corresponde a un comportamiento global "de tipo cubico", dado que el exponente global es impar, y señala, además, que debe ser positivo, lo que se verifica al ver la forma de la gráfica en los extremos (Fig. 10).

Otros profesores mostraron un análisis similar al determinar la expresión analítica de la función, con la diferencia de que se asignaron exponentes diferentes a los factores correspondientes a las raíces en $x = 0$ y $x = 4$. En el procedimiento anterior, el profesor asumió que, en una vecindad a ambas raíces, la gráfica se comportaba como cúbica, pero en el procedimiento del profesor de la Fig. 11A, se considera que en $x = 0$ la gráfica se comporta como recta; en tanto que el profesor de la Fig. 11B, asocia a $x = 4$ el corte de tipo recta.

Esta discrepancia en los exponentes de los factores correspondientes a las raíces $x = 0$ y $x = 4$ se debe, desde nuestro punto de vista, a que la gráfica en cuestión fue reproducida por los profesores a mano en sus libretas, lo que ocasionó algunas diferencias de forma según cada dibujo. No obstante,

Figura 11. Propuesta de expresiones algebraicas para funciones racionales



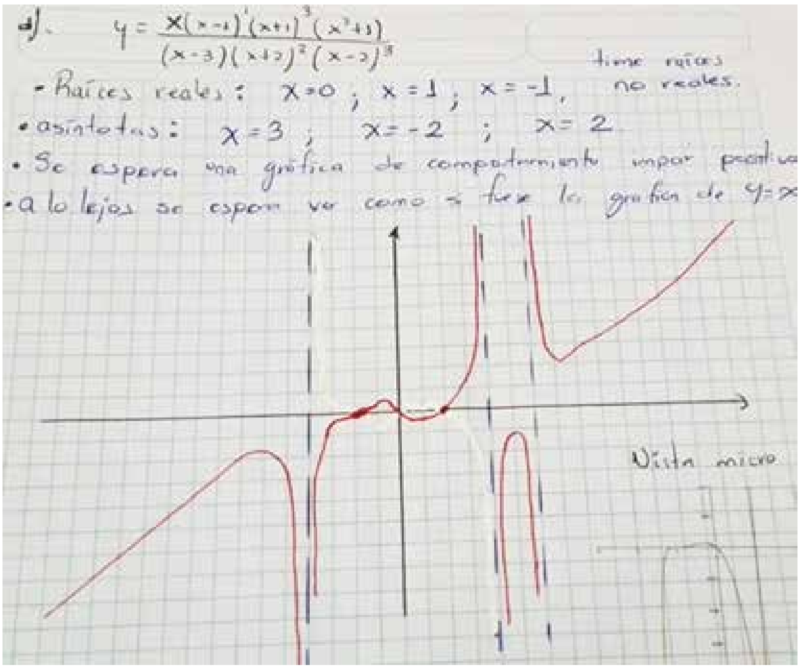
Fuente: extracto de la tarea entregada por los profesores.

resaltamos en estos procedimientos que los profesores reconocen un tipo de comportamiento con base en la forma gráfica que perciben, y esto, a su vez, lo asocian con la multiplicidad de la raíz. En ese sentido, se generaron argumentos funcionales para la interpretación de las gráficas.

Bosquejar la gráfica con base en la expresión analítica

Como hemos mencionado anteriormente, el análisis sobre los comportamientos locales de la función racional es una estrategia para su graficación, tanto el comportamiento seguido por sus raíces como el de sus asíntotas. En la Fig. 12 observamos cómo un profesor identifica primeramente los puntos que son raíces y asíntotas, y sin explicitarlo, identifica también el tipo de comportamiento que la gráfica seguirá en esos puntos. Además, para proponer el bosquejo requiere del análisis global de la gráfica; lo que él menciona como "a lo lejos se espera ver como si fuese la gráfica de $y=x$" (refiriéndose a la gráfica).

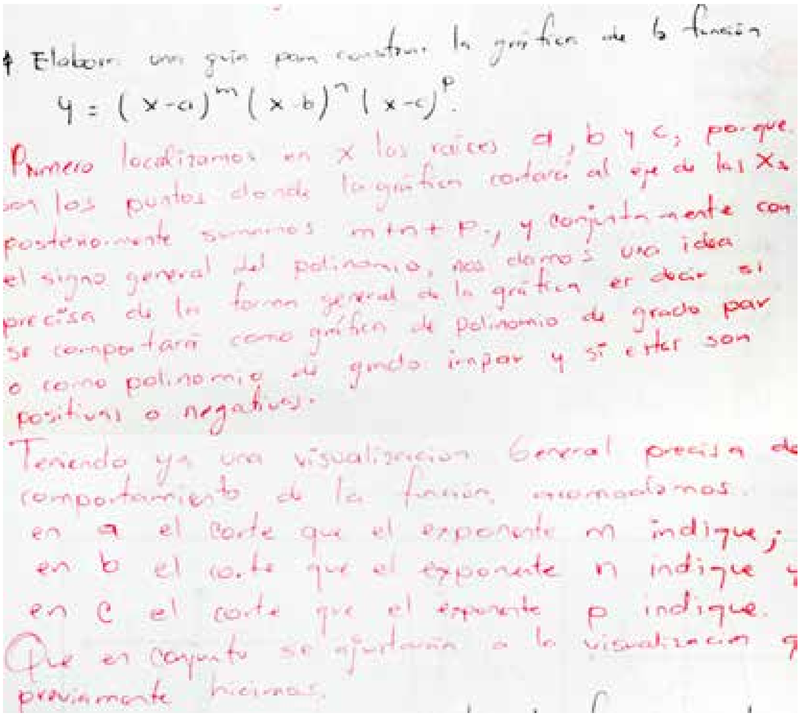
Figura 12. Bosquejo de la gráfica dada la expresión algebraica



Fuente: extracto de la tarea entregada por los profesores.

Por último, consideramos relevante incluir evidencia de cómo el lenguaje verbal, de manera transversal, tuvo una participación importante para el desarrollo de argumentos sobre la visualización de funciones. Por ejemplo, los profesores no sólo articularon el lenguaje gráfico y el algebraico, sino que esto les permitió reconocer procedimientos para la estimación de formas gráficas, tal como se puede observar en la Fig. 13.

Figura 13. Verbalización de estrategias para la graficación



Elabora una guía para construir la gráfica de la función
$y = (x-a)^m (x-b)^n (x-c)^p$.
Primero localizamos en x las raíces a, b y c, porque son los puntos donde la gráfica cortará al eje de las Xs posteriormente sumamos m+n+p, y conjuntamente con el signo general del polinomio, nos damos una idea precisa de la forma general de la gráfica es decir si se comportará como gráfica de polinomio de grado par o como polinomio de grado impar y si estos son positivos o negativos.
Teniendo ya una visualización General precisa del comportamiento de la función, acomodamos:
en a el corte que el exponente m indique;
en b el corte que el exponente n indique y
en c el corte que el exponente p indique.
Que en conjunto se ajustarán a la visualización que previamente hicimos.

Fuente: extracto de la tarea entregada por los profesores.

Conclusiones

En este artículo se mostró la estructura de un seminario especializado cuya intención fue la de favorecer el desarrollo argumental respecto de la visualización de funciones algebraicas. En todo momento seguimos la guía teórica de la socioepistemología al poner en uso el conocimiento escolar habitual. Esto es, los argumentos que las y los profesores construyeron sobre el comportamiento de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas resultaban elementos de naturaleza transversal que permitían el tratamiento de funciones no consideradas por el currículo del nivel educativo en el que laboran: las funciones racionales y las polinomiales de grado mayor a 2, en general de grado *n*.

Para la socioepistemología, la significación de los objetos matemáticos se da en relación al desarrollo de las *prácticas* que le dieron origen al conocimiento. En este sentido, las prácticas de comparar comportamientos globales y locales en una función algebraica a partir de los comportamientos de funciones prototipo, argumentar los comportamientos de la función y bosquejarla, desde el desarrollo de la estimación gráfica y la visualización, son elementos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático. En particular, resultan relevantes para el manejo y significación de un universo de formas gráficas más amplio que, conjuntamente con las acciones de reversibilidad del pensamiento, son requisitos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Con esto, lo que señalamos es que las matemáticas, profundizadas en el tratamiento didáctico en el seminario, no son ajenas a la mirada transversal de las y los profesores, puesto que centramos las discusiones sobre los elementos transversales y funcionales del análisis gráfico. De hecho, en las investigaciones que desarrollamos dentro de la línea de investigación del PyLVar encontramos que la *comparación* y la *estimación* son estrategias utilizadas en el estudio del cambio y la variación ante la predicción de fenómenos dinámicos. Por ejemplo, en situaciones de llenado de recipientes (Caballero-Pérez y Cantoral, 2016) o la predicción en fenómenos no escolares, como la interpretación que hacen los médicos de un electrocardiograma (Moreno-Durazo y Cantoral, 2016).

Para finalizar, ofrecemos un reconocimiento público al profesorado de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) de la ENSFO, por su gran dedicación, arduo trabajo y trato especial en el desarrollo del Seminario de precálculo descrito anteriormente, a pesar de que en muchas situaciones tienen, por así decirlo, la adversidad al frente. Consideramos que los excelentes resultados obtenidos darán evidencia de su empeño y compromiso con el desarrollo profesional docente, donde algunos profesores incluso mostraron interés por la investigación de temáticas cercanas a las discusiones realizadas en el seminario. Hoy día las están llevando a sus aulas escolares.

Referencias

Caballero-Pérez, Mario (2013), "Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 26, núm. 1, pp. 1197-1205.

Caballero-Pérez, Mario (2016), "Los sistemas de referencia: el papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción", Memoria predoctoral, México, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Caballero-Pérez, Mario y Ricardo Cantoral (2016), "Development of Variational Thinking and Language for the Teaching and Learning of Calcullus", resumen de presentación en el 13 International Congress on Mathematical Education, Hamburgo, 24-31 de julio de 2016.

Cantoral, Ricardo (2013), *Pensamiento y lenguaje variacional*, México, SEP.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", *Epsilón*, núm. 42, pp. 353-369.

Cantoral, Ricardo, Rosa María Farfán, Francisco Cordero, Juan Antonio Alanís, Rosa Amelia Rodríguez y Adolfo Garza (2005), *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas.

Cantoral, Ricardo y Gisela Montiel (2014), *Precálculo. Un enfoque visual*, México, Pearson.

Farfán, Rosa María (2013), *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*, México, SEP.

Gobierno de México-Secretaría de Educación Pública (SEP) (2013), *Programa de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica matemáticas,* México, SEP.

Gómez, Joan (2008), "La ingeniería como escenario y los modelos matemáticos como actores", *Modelling in Science Education and Learning*, vol. 1, núm. 1, pp. 3-9.

Montiel, Gisela (2013), *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*, México, SEP.

Moreno-Durazo, Gloria Angélica (2016), "Matemáticas y medicina. Un estudio del pensamiento y lenguaje variacional", Memoria predoctoral, México, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Moreno-Durazo, Gloria Angélica y Ricardo Cantoral (2015), "Socioepistemología: medicina y matemáticas. Elementos para el estudio de principio estrella", en Flor Rodríguez y Ruth Rodríguez (eds.), *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización docente desde los posgrados de calidad en matemática educativa 17*, Oaxaca, CIMATES, pp. 59-66.

Moreno-Durazo, Gloria Angélica y Ricardo Cantoral (2016), "Mathematics and Medicine. A study of variational thinking and language", resumen de presentación en el 13 International Congress on Mathematical Education, Hamburgo, 24-31 de julio de 2016.

Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson (2001), *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, México, Thomson.

Wagner, Galen y David Strauss (2014), *Marriott's Practical Electrocardiography,* Philadelphia, Lippincott Williams & Wilkins.

Los saberes matemáticos en la cultura mixteca a través del bordado como práctica de referencia

Adolfo Agustín Acevedo Mendoza*
Javier Lezama A.**

Las matemáticas están presentes en la cultura mixteca. Hasta la fecha, quedan pueblos que mantienen sus formas de vida original. Como estrategia metodológica, en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria, que se imparte en la Normal Superior Federal del Estado de Oaxaca se promovió el acercamiento a prácticas culturales originarias con el fin de identificar lo que en el enfoque socioepistemológico se llaman "prácticas de referencia". En esta investigación se buscó, a través de un método etnográfico (entrevista abierta), identificar saberes matemáticos presentes en la cotidianidad de la vida de los habitantes en la región mixteca. En este trabajo ponemos atención en una actividad desarrollada por una mujer indígena a través del bordado de su vestimenta. Se reportan elementos relevantes de esta actividad, mismos que pueden alentar o guiar la construcción de diseños de intervención didáctica en la escuela secundaria, inspirados en dichas prácticas.

Palabras clave

Práctica de referencia
Saber matemático
Práctica social
Funciones de la práctica social
Bordado
Cultura mixteca

* Profesor frente a grupo en educación secundaria en el estado de Oaxaca. Profesor en Educación Primaria, Escuela Normal Primaria Gustavo Díaz Ordaz; licenciado en Educación Media en el área de matemáticas, Escuela Normal Superior del estado de Puebla; maestro en ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria, Escuela Normal Superior del Estado de Oaxaca (ENSFO). CE: adolfitoac@hotmail.com

** Profesor investigador en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (México). Doctor en Matemática Educativa. Líneas de investigación: estudios sobre el profesor de matemáticas; desarrollo profesional docente del profesor de matemáticas. Publicaciones recientes: (2016, en coautoría con M. Parraguez y R. Jiménez), "Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio de base de vectores", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 34, núm. 2, pp. 129-150; (2016, en coautoría con S. Montoya), "La reproducibilidad de situaciones de aprendizaje en un taller de reflexión docente", *Cuadernos de Investigación Educativa*, vol. 7, núm. 1, pp. 41-54. CE: jlezamaipn@gmail.com

Investigación y problemática

La matemática es un pilar fundamental de la civilización y la cultura humana. A lo largo de la historia los grupos humanos han hecho aportaciones significativas en ese campo del conocimiento basadas en necesidades específicas y normadas por factores de carácter sociocultural. Hoy llamamos ciencias a esos conocimientos. Actualmente el campo que estudia la construcción del conocimiento matemático y su difusión en la escuela es conocido como "matemática educativa". Este campo aporta elementos teóricos para que los profesores de matemática puedan estudiar y entender los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de esa disciplina en la escuela. Haciendo uso del enfoque socioepistemológico de la matemática educativa, se hace un acercamiento a lo que un grupo de pobladores de la Mixteca pone en juego en algunas de sus prácticas ancestrales y que continúa siendo utilizado actualmente. Nosotros identificamos en estas prácticas un saber matemático, mismo que no es valorado en el currículo escolar actual.

Identificación del problema

El camino seguido en esta investigación consistió primero en una revisión histórica de los saberes mixtecos utilizados antes de la conquista para identificar después los saberes matemáticos utilizados actualmente. La revisión histórica se efectuó por medio de la exploración bibliográfica y el análisis de elementos elaborados antes de la época de la conquista: códices, monumentos, y el lenguaje. La selección de estos elementos se debe a que, al haber pocas investigaciones en el tema, era necesario rescatar lo poco que se tiene de un pasado remoto. Para identificar prácticas socialmente compartidas (actividad humana), regidas por necesidades pragmáticas y estéticas en este caso, fue necesario identificar y valorar lo que resulta representativo y significativo para los sujetos que participan en ellas. Fue así como se seleccionó la comunidad de San Pablo Tijaltepec, ya que sus atavíos los identifican como pobladores de ese lugar.

Cantoral afirma que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas. Más adelante afirma que se establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen con las actividades mediante las cuales, y en razón de las cuales, dichos conocimientos son producidos. Las matemáticas, bajo este enfoque, están en la base de la cultura humana de la misma manera que el juego, el arte o el lenguaje (Cantoral, 2013).

Comunidad de estudio

Los Ñuu Savi (pueblo de la lluvia) abarcan una región geográfica extensa (19 mil 975 km^2). Identificar una práctica social a estudiar en un determinado lugar de la Mixteca es un dilema, dada la gran diversidad de actividades ancestrales que existen y por la enorme extensión territorial. Es justamente en estos lugares alejados de las ciudades, donde aún se conservan costumbres heredadas de sus ancestros.

El lugar seleccionado para el estudio, San Pablo Tijaltepec, se localiza en la Mixteca alta; éste es uno de los 570 municipios con que cuenta el estado de Oaxaca.

Ubicación de San Pablo Tijaltepec

Selección de la práctica: bordando cultura

"Los textiles mixtecos merecen un capítulo entero en la historia del arte mexicano por su gran diversidad y calidad" (De Ávila, 2012: 89). Debido a la diversidad de materiales, plantas y animales que se incluyen en las estructuras del tejido, éstos expresan la enorme diversidad en esta zona. La mayoría de prendas no se fabrican con fines comerciales, sino para el uso de las familias que las elaboran.

Mujeres de Tijaltepec en una escena cotidiana en el atrio de la iglesia

Juana Bautista García, con su vestimenta
de Tijaltepec (de uso diario)

Las tejedoras de San Pablo Tijaltepec portan orgullosamente su traje, que consiste en una blusa bordada y una falda larga llamada enagua. Podemos encontrar a las mujeres de Tijaltepec haciendo labores domésticas, labores de campo, en la iglesia o al cuidado de sus hijos, y siempre portan vestidos confeccionados por ellas; solamente las jóvenes han empezado a usar vestimenta al estilo moderno, por lo que la tradición comienza a perderse. Aunado a ello, en la escuela primaria y secundaria deben portar un uniforme que es entregado por las autoridades educativas al inicio del año, aunque los alumnos de primaria deben llevar el traje propio de la comunidad todos los viernes.

Metodología

Se realizaron visitas a la comunidad de San Pablo Tijaltepec para entrevistar a la señora Juana Bautista García, debido a la disposición tan favorable que ella mostró hacia la investigación. Fue la única con la que se tuvo diálogo. Juanita tiene un puesto en el mercado de ese lugar y habla bien el español, lo que facilitó establecer el contacto y gestionar las condiciones necesarias para platicar con ella.

A continuación se transcribe parte de los diálogos sostenidos con ella. En ellos es posible valorar la práctica socialmente compartida que nos permite identificar los saberes matemáticos allí existentes:

> Juanita: pues de mi familia, de mi mamá, de mi abuelita, ella ya sabía bordar, de allí me enseñaron cómo bordar, de allí poco a poco aprendí a bordar.

Juanita muestra lo que ella teje y la forma como lo hace

Su alusión a la abuelita expresa que su madre aprendió de su abuela. Este mecanismo de enseñanza generacional constituye un principio de la institucionalización, mecanismo que caracteriza a las prácticas sociales.

> Juanita: sí, pero ya terminado, no es dibujar, es como esto que tengo [muestra uno que tiene y señala lo que para ella es dibujar] calculando más o menos, pero es así, no estoy pintando.

La visualización se entiende aquí como un proceso avanzado de pensamiento matemático, que implica la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y en el lenguaje que se aprende (Cantoral y Montiel, 2003). Juanita despliega recursos que hacen evidente su visualización de saberes matemáticos a través de una construcción social del conocimiento.

Aquí muestra cómo se lleva a cabo el plisado con la aguja, es cuando va a continuar bordando y ya no está la marca del plisado

Diseñar implica imaginar la naturaleza sin las partes innecesarias; es abstraer una forma del entorno natural (Bishop, 1999), y es aquí donde se ponen de manifiesto el diseño y la construcción social del conocimiento.

> Juanita: éste es un girasol, pero no sale como dibujar en una hoja, porque como esto está plisado no se puede sacar, pero, pensé antes, tengo que hacer una flor, a ver qué tal sale.

Continúa Juanita con menciones de detalles que permiten imaginar formas, figuras del entorno natural que como pensamiento matemático corresponden al diseño; además muestra una imaginación espacial, ya que puede visualizar los espacios para cada figura que hará y anticipar los resultados: al prever las dimensiones nuevamente aparecen prácticas matemáticas de abstracción, visualización y estimación que se ponen en juego.

La simetría como pensamiento matemático, ellas no conocen este concepto institucionalizado, pero si saben que las figuras deben ser iguales

> E: ¿cuentas?
>
> Juanita: pues no, no hago cuentas, pensamos el dibujo, imaginar que podemos dibujar, es... es dibujar, piensa uno qué va uno a dibujar, así es esto.

Desde la perspectiva desarrollada por Piaget (cit. por Cantoral y Montiel, 2003), al preguntarle a Juanita qué debe hacer al elaborar su bordado, ella describe actividades de visualización, es decir, la imagen mental del espacio y del diseño que va a plasmar en la prenda que va a hacer; evoca en su memoria la representación que va a plasmar. Ésta es una muestra del

"Nomás lo estoy copiando de esto, nomás lo estoy calculando, mira, éste salió de más pico que éste y éste no tiene pico, nomás lo hice y tengo que verlo, unos bordos como sean como quedan"

potencial utilizado en su práctica socialmente compartida. Cuando Juanita menciona que no hace cuentas, lo que se evidencia es que hace estimaciones, utiliza la noción de proporcionalidad, simetría axial, conteo e inferencia para determinar la cantidad de hilo, el tamaño de la manta y el tamaño final del bordado, que son características del pensamiento matemático.

Identificación de las funciones de la práctica social

La socioepistemología considera las prácticas sociales como la base del conocimiento; son el soporte para la construcción social del mismo. No es lo que hace en sí el individuo o grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen aun sin adquirir conciencia de sus acciones (Cantoral *et al.*, 2014).

A partir de la información recogida en la entrevista, buscamos identificar la práctica de Juanita como una práctica social a partir de las funciones que se le atribuyen en la teoría socioepistemológica (función identitaria, función discursiva, función pragmática y función normativa).

Función identitaria

De acuerdo con Cantoral (Cantoral, 2013: 164), "La práctica social produce identidades, pues configura un escenario de representaciones sociales en el que se autoconfirma el rol del sujeto en el mundo, del individuo en su comunidad y del individuo hacia su yo interno"; desde nuestra perspectiva teórica, entendemos la identidad como una red de interacciones y de prácticas entre personas, comunidades y su contexto. Esto se puede identificar en el siguiente texto:

> Juanita: así es, me gusta porque es el traje típico de mi pueblo y no quiero perder el traje, desde los abuelitos lo tenían y hacían y no quiero perder, es bonito, es costoso hacerlo pero también es bonito ocupar el traje.

Función pragmática

La función pragmática permite "orientar las acciones en la actividad humana, al adquirir la capacidad de producir intencionalidad e interacción de la actividad con la práctica hasta alcanzar el nivel de competencia deseado, la expertez o la experiencia" (Cantoral, 2013: 164); esta función la encontramos cuando Juanita elabora la ornamentación de su blusa y la explica de esta manera:

> Juanita: para hacerle aquí tengo que sacarle un hilito de éstos nomás, no es que cuento sino un decir, como esto es del pecho que va así y nomás calculo más o menos que pueda agarrar la manga para que pueda ir la blusa así, nomás tengo que sacar todo este hilo hasta que llegue acá y ya después jalo estos dos, uno de abajo y uno de arriba, para que vaya del mismo, ya lo jalo y ya se unen cuando termino de unir. Lo que pasa que nosotros no contamos nomás para terminar de unir todo y ya se queda así, se queda eso como…

Función discursiva

Es "la práctica más recurrente e influyente en los actos de entendimiento" (Cantoral, 2013: 165). Se refiere a la forma como Juanita intenta explicarnos cómo borda; utiliza esta función de la práctica social con su lenguaje; aunque su lengua materna es el mixteco, también domina el español como segunda lengua. La función discursiva la encontramos en el diálogo, como puede verse en las líneas que siguen:

> Juanita: nada más hay dos, pero nomás a uno lo junta uno, por ejemplo éste que ya hice ya no lo voy hacer, vuelvo a agarrar otro, éste otra vez y aquí para el otro hilo vuelvo agarrar éste otra vez… este que ya hilé ya no lo voy a hacer.

Función normativa

La forma de bordar y el tipo de materiales a utilizar ya han sido instituidos; dicha institucionalización se puede apreciar a través de instrumentos sociales como los consensos, es decir que el establecimiento de este tipo de bordado en esta comunidad es producto de un proceso. Así mismo, esta práctica ha estado sujeta (a decir de Juanita) a la permanencia y también al cambio, en el sentido de que las niñas pequeñas, por influencia de los medios de comunicación y la escuela, ya no utilizan el traje tradicional todos los días.

> Juanita: pues de mi familia, de mi mamá, de mi abuelita, ella ya sabía bordar, de allí me enseñaron cómo bordar, de allí poco a poco aprendí a bordar.

Análisis

El pensamiento matemático se hace presente cuando las personas, en su actividad cotidiana, desarrollan una manera de pensar, conceptos y procesos que podemos reconocer hoy en la escuela como propiamente matemáticos, puesto que la actividad matemática es una forma particular de actividad humana (Farfán, 2012). Ésta se hace presente en lugares específicos con determinadas características y se hace evidente por los medios propios del lugar, aun cuando no sean reconocidos ni valorados en otros lugares. Esto nos permite reconocer que las matemáticas, siendo universales, son valoradas y reconocidas de distinta manera en cada espacio y época. Las culturas reconocidas en la historia están presentes en los estudios escolares actuales: la egipcia, la romana y la griega; sus aportaciones sobresalen en diferentes ámbitos de la cultura, la ciencia y las artes.

En este trabajo reconocemos los saberes de la cultura mixteca, que es parte de México, y, por lo tanto, de las culturas mesoamericanas, y cuyo auge se dio antes de la conquista. Con este trabajo, hecho bajo la mirada de la socioepistemología, se buscó detectar y analizar indicios de la forma en que "la cultura actúa sobre el individuo y desde el individuo cuando trata con las matemáticas" (Cantoral 2013: 134). La información recogida provee información extremadamente rica y valiosa que nos permite identificar aspectos del contexto social y cultural que determinaron formas de pensar y proceder en momentos y espacios que propician la generación del conocimiento matemático; en la actualidad esta información nos sirve para crear situaciones de aprendizaje escolar que permitan visibilizar y resignificar esas formas culturales, que son parte del testimonio de un pueblo y que se expresan en su cotidianidad.

En la entrevista realizada a Juanita, habitante de San Pablo Tijaltepec, pudimos reconocer la existencia de saberes matemáticos (un conocimiento en uso) en una práctica socialmente compartida por las mujeres del lugar; estos saberes se ponen en juego cuando ella elabora su bordado, actividad que implica una manera matemática de pensar que nos demanda explorarla con mayor profundidad. Reconocimos en su lenguaje simple —ya que su lengua materna es el mixteco— que es dueña de saberes matemáticos tácitos que se expresan en su hacer y su decir.

En este estudio también pudimos reconocer los patrones geométricos utilizados por Juanita al hacer una figura que va en la manga (como ella lo explica); lo que allí plasma es un patrón que sigue para formar la figura:

> Juanita: es un arco nada más, una *m* nada más, usted en su mente piensa que va hacer esto nada más…

En su respuesta se ve que el patrón y la simetría que ejecuta son visibles, pero la falta de precisión de ese patrón parece no importarle mucho. Ella termina su bordado y se pone la blusa así, sin importar la diferencia.

> Juanita: pues sí, porque tiene que quedar, pues no se tiene calculado y a veces paso un poco, mira, éste parece que está un poco más arriba que éste y éste está más arriba que éste, pero ni se ve, y un poquito éste se subió, nada, un poquito, pero supuestamente tú vas a llegar a bordar, a veces paso dos o tres hilos de esto pero así ya la dejo, casi no se ve pues…

Identificamos nociones de espacio y medida en las ocasiones en que, a pregunta nuestra, ella explica —a veces con sus manos, otras veces señalando dentro de la figura— lo que quiere decir:

> Juanita: sí, pero ya terminado, no es dibujar, es como esto que tengo [muestra uno que tiene y señala lo que para ella es dibujar] calculando más o menos, pero es así, no estoy pintando.

Otro elemento matemático identificado es el de la estimación como habilidad matemática; ésta es mostrada dentro de su práctica como bordadora cuando responde afirmativamente a la pregunta "¿copia el dibujo?", y lo hace mostrando su habilidad de visualización geométrica, ya que tiene en mente la figura que va a bordar, y no tiene otro referente más que el dibujo que ve (sin tomar medidas) y que pretende reproducir en la tela en que plasmará el dibujo. Para ella, el dibujo es la imagen mental de la figura.

La noción de proporcionalidad en su modelo aditivo simple:

> Juanita: una pieza de ésas está a 600 pesos, los dos 1200 pesos [su costo en material].

La noción de proporcionalidad (modelo cualitativo):

> Juanita: sí, cuesta mucho porque es más grande.

La noción de estimación:

> Juanita: nada más calcule para que llegue y ya que llegue así y ya empiezo, ah porque si corto muy largo va a quedar largo aquí, y si corto muy cortito también no va a salir de la orilla, no va a alcanzar, y así voy hasta que se llegue y ya.

Podemos observar que la simetría axial está presente cuando ella realiza una figura que va en el pecho: son dos bordados de manera encontrada (simetría axial), y aunque no expresa dicha simetría, sí la lleva a cabo. Esto que ella trata de hacer es lo que tiene en mente ya visualizado, mas no percibe que se trata de una simetría. Es importante señalar, a manera de hipótesis, que de manera inconsciente ella se percibe como el eje de simetría. Este aspecto deberá ser estudiado con mayor profundidad:

> Juanita: y a veces ni salen iguales, porque como no se cuenta…

La noción de proporcionalidad la manifiesta cuando compara la flor del centro con las dos que van a los extremos, en lo que ella llama "el arquito" sobre la pieza que va en los hombros:

> Juanita: sí, pero nada más que esto no salió como girasol porque no cabe, no quepa acá y esto como que ocupo mucho espacio pues aquí sí, aquí sí salió y acá ya no.

Conclusión

En la práctica de referencia, el bordado ornamental, la triada uso-usuario-contexto está presente y normada por una práctica social en el escenario social y cultural de los habitantes de Tijaltepec; sus pobladores comparten, desde que nacen, esa forma de vestir con sus familiares y habitantes del lugar. Se trata de un paradigma de pensamiento disciplinario y cultural en el que la práctica de referencia (bordado ornamental) está estructurada y, a la vez, es factor estructurante de un proceso de construcción de conocimiento matemático.

En pueblos como Tijaltepec, en las escuelas de tipo rural como telesecundarias se van adoptando ideas occidentales a las que se otorga un alto valor y con ello se van perdiendo, lenta e inadvertidamente, sus raíces. En este proceso los medios de comunicación ejercen una influencia determinante, así como los migrantes que regresan de lugares lejanos con ideas a veces incluso contrarias a aquéllas en las que se habían formado.

Este trabajo nos da elementos para trabajar en un rediseño del discurso matemático escolar que reconozca a una matemática en uso en el escenario social y cultural que rodea a la escuela; así mismo, nos plantea el problema de diseñar propuestas de intervención didáctica en la escuela, centradas en prácticas escolares que permitan que el estudiante viva experiencias que le faciliten producir conocimientos desde su realidad.

Referencias

Bishop, Allan. J. (1999), *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*, Barcelona, Paidós.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. *Estudios sobre construcción social del conocimiento,* Barcelona, Gedisa.

Cantoral, Ricardo y Gisela Montiel (2003), "Visualización y pensamiento matemático", en Juan Raúl Delgado (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Santiago de Chile, Lorena Impresores, vol. 16, tomo II, pp. 694-701.

Cantoral, Ricardo, Daniela Reyes-Gasperini y Gisela Montiel (2014), "Socioepistemología, matemáticas y realidad", *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, vol. 7, núm. 3, pp. 91-116.

De Ávila, Alejandro (2012), "Historia y simbolismo de los textiles mixtecos", en Reina Ortiz, *Las rutas de la tierra del sol*, Huajuapan de León (Oaxaca), Universidad Tecnológica de la Mixteca, pp. 89-172.

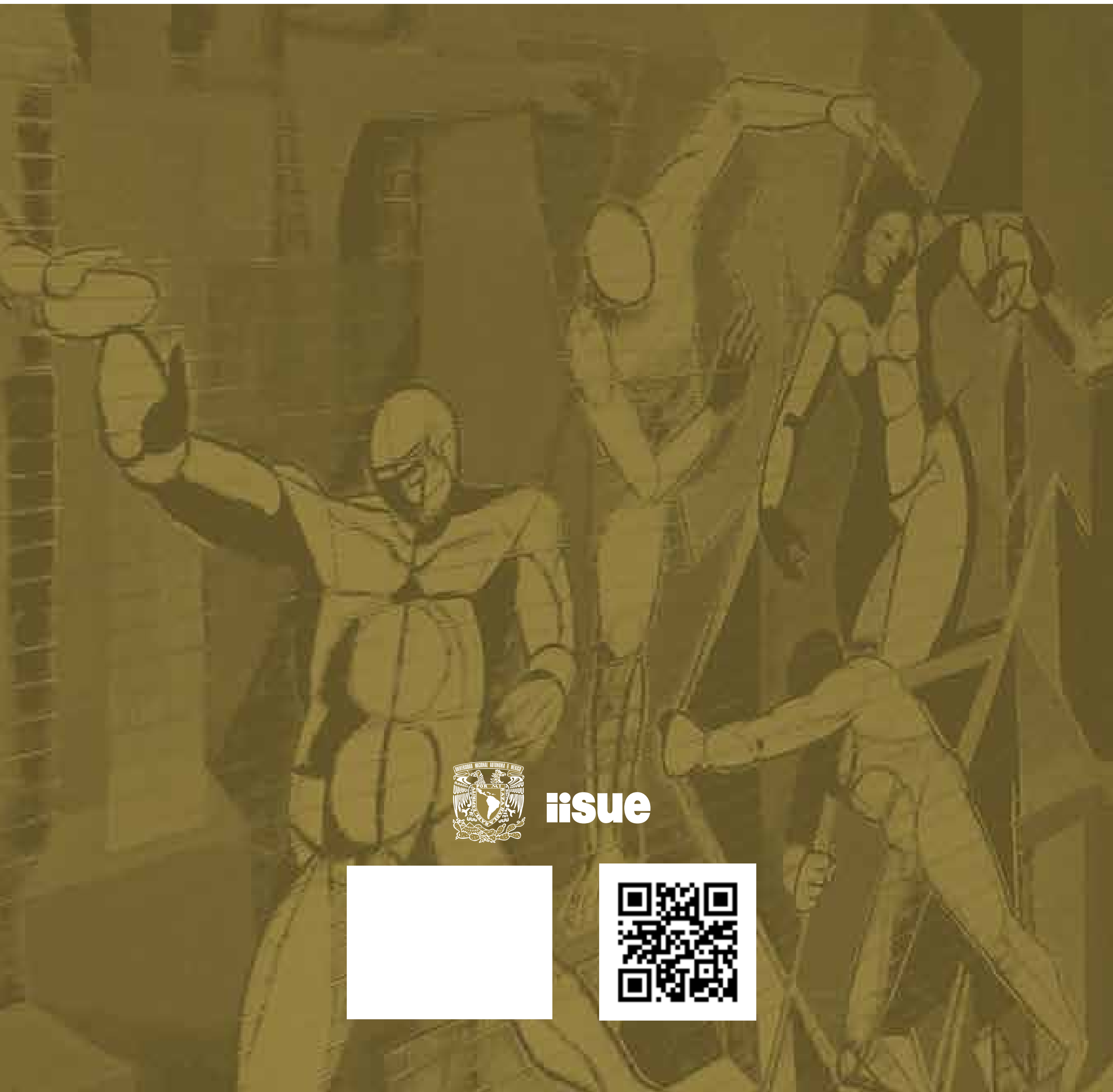
Farfán, Rosa María (2012), *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*, Barcelona, Gedisa.


PERFILES EDUCATIVOS
A partir de 2013 *Perfiles Educativos* en ePub, descarga los contenidos en:
www.iisue.unam.mx/perfiles
Además, puedes consultar todos los números en formato PDF

Perfiles Educativos publica cuatro números al año con los resultados más recientes de la investigación sobre los distintos aspectos de la educación. Su línea editorial da cabida a los diferentes tipos de indagación, pues considera que las ciencias de la educación se han constituido en un campo inter y pluridisciplinario. La educación es un campo de conocimiento y también un ámbito de intervención, por lo que se publican resultados de investigaciones con referentes teóricos o empíricos, así como desarrollos teóricos y reportes de experiencias educativas acompañados de una fundamentación conceptual.

Perfiles Educativos es una revista de intercambio y debate abierta a todos los interesados en la investigación educativa. Tiene un carácter plural en cuanto al reconocimiento de las diversas disciplinas de las ciencias de la educación, como en lo referente a la perspectiva teórica y metodológica adoptada por cada investigador, siempre y cuando refleje resultados rigurosos de indagación. Está dirigida a investigadores, tomadores de decisiones, especialistas y estudiantes de grado y posgrado relacionados con el campo educativo.

1. Las colaboraciones deberán ser artículos originales e inéditos. Para la sección Claves: artículos de investigación, de carácter teórico o empírico, con una metodología aplicada al estudio; para la sección Horizontes: avances de investigación, desarrollos teóricos, aportes de discusión y debate o reportes de experiencias educativas; y para la sección Reseñas: reseñas temáticas y de libros.
2. Los originales deberán presentarse en versión electrónica y tendrán una extensión de entre 20 y 30 cuartillas (estándar: Times de 12 puntos, interlineado 1.5, con 27-28 líneas, 2000 caracteres sin espacios por cuartilla), esto es, entre 7000 y 10,500 palabras (incluyendo cuadros, gráficas y referencias). Las reseñas serán de publicaciones recientes en educación y constarán de 6 a 10 cuartillas (de 2,100 a 3,500 palabras). No se aceptarán trabajos que no cumplan con los mínimos y máximos establecidos.
3. En el artículo deberá incluirse un resumen de entre 100 y 150 palabras, además de cinco a siete palabras clave, tomando como base el "Vocabulario Controlado del IRESIE", el cual puede consultarse en la página: www.iisue.unam.mx. El título del artículo deberá ser lo más breve y sintético posible. Deberá incluirse también el nombre de los autores y/o autoras del trabajo, grado académico, institución, cargo que desempeñan, temas que trabajan y correo electrónico, así como el título de dos publicaciones que deseen dar a conocer.
4. Las notas del aparato crítico deberán ser lo más concisas posible y se presentarán numeradas al final del artículo. No deberán consistir únicamente en referencias bibliográficas.
5. Los cuadros e ilustraciones deberán utilizarse sólo en la medida en que sean necesarios para el desarrollo y comprensión del texto. Deberán estar acompañados de la palabra "cuadro", "tabla" o "figura", con numerado consecutivo y citando siempre su fuente. Los cuadros y tablas deberán presentarse en formato de texto, no como imagen.
6. Todas las siglas deberán estar desatadas y explicitadas, al menos la primera vez que aparezcan.
7. Los artículos deberán incluir sólo referencias bibliográficas, no bibliografía general. Los autores deben asegurarse de que las fuentes a las que se aluda en el texto y en las notas al pie de página concuerden con aquellas que aparezcan al final, en el apartado de referencias.
8. Para la identificación de fuentes en el texto se utilizará la forma entre paréntesis (por ejemplo: Martínez, 1986/ Martínez, 1986: 125). En el caso de tres o más autores/as se sintetizará con *et al.* (por ejemplo: Martínez *et al.*, 1986: 125); sin embargo, sus nombres completos deberán aparecer en la lista de referencias al final del artículo.
9. Las referencias al final del artículo deberán aparecer por orden alfabético, como bibliografía.
   Ejemplos del estilo utilizado:
   Para libros: ALVARADO, Lourdes (2009), *La polémica en torno a la idea de universidad en el siglo XIX*, México, IISUE-UNAM.
   Si se trata de un capítulo de libro en colaboración: BAUDOUIN, Jean-Michel (2009), "Enfoque autobiográfico, tutoría implícita y dimensiones colectivas del acompañamiento", en Patricia Ducoing (coord.), *Tutoría y mediación*, México, IISUE-UNAM/Afirse, vol. I, pp. 31-55.
   Para artículos: FUENTES Monsalves, Liliana (2009), "Diagnóstico de comprensión lectora en educación básica en Villarica y Loncoche, Chile", *Perfiles Educativos*, vol. XXXI, núm. 125, pp. 23 -37.
   Para páginas web: ORDORIKA, Imanol y Roberto Rodríguez (2010), "El *ranking* Times en el mercado de prestigio universitario", *Perfiles Educativos*, vol. XXXII, núm. 129, pp. 8-29, en: http://www.iisue.unam.mx/sección/perfiles (consulta: fecha).
10. Los trabajos se someterán a un proceso de dictamen donde se conservará el anonimato de quienes realizan el arbitraje, así como de los autores y autoras, a quienes se les dará a conocer el resultado de la dictaminación.
11. Los autores se comprometen a no someter a ninguna otra revista su artículo a menos que *Perfiles Educativos* decline expresamente su publicación. Al aprobarse la publicación de su artículo, ceden automáticamente los derechos patrimoniales de éste a la UNAM y autorizan su publicación a *Perfiles Educativos* en cualquiera de sus soportes y espacios de difusión. La revista permitirá la reproducción parcial o total, sin fines de lucro, de los textos publicados, siempre y cuando se obtenga autorización previa por parte del editor y el autor, y que en la reproducción se explicite que dicho artículo ha sido publicado originalmente en *Perfiles Educativos*.
12. En la edición del artículo se pueden hacer las modificaciones de extensión o estilo que exijan las políticas editoriales de la revista, consultándolo previamente con el autor o la autora.
13. Para el envío de originales deberá dirigirse un correo electrónico con la colaboración adjunta a la dirección: perfiles@unam.mx


iisue