Oaxaca: una transformación colectiva con impacto social y educativo

Daniela Reyes-Gasperini*

El objetivo de este artículo es mostrar cómo, a pesar de las situaciones adversas, existe una actitud para la transformación por parte del profesorado oaxaqueño. Caracterizamos el dispositivo de intervención de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria en Oaxaca, cuyo rasgo distintivo principal es que potencia las fortalezas de las y los colegas docentes, sobre la base de la problematización de la matemática escolar. Con base en el ejemplo del seminario sobre *lo proporcional*, se evidencian las interacciones para con la matemática escolar y las propuestas de intervención en sus aulas. El crecimiento profesional docente autónomo como parte de la práctica y el desarrollo profesional promueve en el profesor autonomía y lo ubica en un rol activo.

Palabras clave

Empoderamiento docente

Desarrollo profesional docente

Problematización de la matemática escolar

Socioepistemología

Matemática educativa

* Coordinadora académica del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas - PIDPDM (México). Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Línea de investigación: socioepistemología y empoderamiento docente. Publicaciones recientes: (2016), "Funcionalidad de los algoritmos en el desarrollo del pensamiento matemático", *Novedades Educativas*, núm. 305, pp. 18-24; (en coautoría con R. Cantoral, en prensa), "Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber matemático en una transformación educativa?", *Revista de Ciencias de la Educación*. CE: dreyes@cinvestav.mx

Introducción[1]

El creciente interés por el estudio del desarrollo profesional docente en el campo de las matemáticas, en específico en la región de Latinoamérica (Cabrera, 2014; Lezama y Mariscal, 2008; Montiel, 2009; Pochulu y Rodríguez, 2012; Soto, 2015, entre otros) configura el contexto que sustenta este artículo. Todas las propuestas persiguen un objetivo claro: la mejora en la acción de educar matemáticamente, de diferentes maneras y en diferentes regiones.

La articulación entre lo que piensan y lo que hacen en las aulas los profesores como caracterización de las creencias docentes, según Pajares (1992), permite posicionarnos y distinguirnos: por nuestra parte, *no* nos propusimos modificar creencias, sino que nos planteamos un objetivo de intervención práctica donde los profesores vivieran una nueva relación con el conocimiento matemático y una nueva manera de significarlo (dotar de significado al objeto), que les permitiera, a partir de la *reflexión*, consolidar en la *acción* las innovaciones que quisieran construir. Propusimos, explícitamente, nuevas maneras de *hacer*, y no de *creer*. Si este hecho modifica sus creencias o no, dependerá de cada uno de los profesores y por tanto no fue nuestro objeto de estudio. Esto surge en virtud de que, como señalan Lezama y Mariscal (2008), debemos preguntarnos sobre cómo generar confianza y autonomía que les permita, desde su propia iniciativa, arriesgarse a la innovación y que sea parte de su identidad profesional y contribuya, en palabras de Llinares (2013), a "mirar profesionalmente". Todo esto, tal como lo plantea Montiel (2009), refiere a preguntarse sobre la transformación de la práctica docente que se llevaría a cabo mediante la resignificación de la matemática escolar. Entonces, a partir de la reflexión que realiza Pozo (2012) sobre la necesidad de trabajar con la gestión y la relación con el conocimiento matemático (tema que Ponte *et al.,* 2013, estudian desde el análisis de la conducción de discusiones colectivas en la clase de matemática) proponemos y estudiamos, por nuestra parte, una alternativa para atender al planteamiento establecido como un proceso precedente a la actividad áulica: el crecimiento profesional docente autónomo como parte de la práctica profesional.

En particular, al hablar de desarrollo profesional docente nos referiremos a la postura de Ponte (1998), a saber: plantear actividades como proyectos, cambios de experiencias, lecturas, reflexiones; considerar un movimiento de "dentro hacia fuera", es decir, tomar en cuenta lo que los profesores quieren hacer y llevar a la práctica, poniendo atención a sus potencialidades, más allá del señalamiento de sus falencias; incorporar los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales del profesor; consolidar la consideración de la teoría y la práctica de manera íntegra. A partir de ello se desea lograr, entre otras, la elaboración de un producto final que represente una intervención teóricamente fundamentada, en la práctica.

1 La autora desea agradecer a la cultura del estado de Oaxaca, a Ley, a Miguel, a Benja y a todas y todos los colegas estudiantes de la MEMES. Oaxaca es una región que sabe lo que quiere y, desde hace muchos años, se ha propuesto realizar una transformación colectiva para un impacto social. En el 2012, coincidimos y empezamos a avanzar juntos.

Así, apoyándonos en los estudios de Montiel (2009) y Lezama y Mariscal (2008), teorizamos y proponemos a la problematización de la matemática escolar (PME) como un recurso que abre una nueva postura frente al fenómeno del desarrollo profesional docente: cuestionaremos, propondremos acciones, evidenciaremos transformación de la práctica bajo la concepción de que es la PME nuestro cimiento de partida. En síntesis, si pretendemos mejorar la educación matemática, suponemos indispensable considerar al saber matemático y, en particular, su problematización, para hacer una inmersión y una propuesta de acción sobre el desarrollo profesional docente. Nuestra propuesta apuntó a lo que hoy podemos enunciar teóricamente como el cambio de relación con el conocimiento matemático escolar (Reyes-Gasperini, 2016).

En este artículo se explicará cómo se confeccionó el dispositivo de intervención, los sustentos teóricos y sus propósitos, a partir de un ejemplo del desarrollo del pensamiento proporcional, para cerrar con la evidencia de los logros obtenidos con las y los entusiastas profesores oaxaqueños de nivel secundario que conformaron la primera y la segunda generación del programa de Maestría en la Enseñanza de la Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) del Instituto Estatal de Educación Pública de Oaxaca. Dicha maestría se imparte desde la Coordinación General de Educación Básica y Normal, Departamento de Formación y Actualización de Docentes de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca.

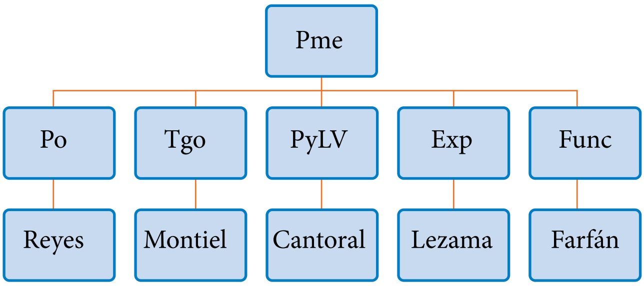
La propuesta de innovación

El contexto sobre el cual se trabajó esta propuesta (detallado en el artículo de Javier Lezama de este mismo número especial), precisaba de la consideración del contexto de los estudiantes, a través de sus profesores. Las y los profesores oaxaqueños trabajarían de manera que, al concluir, pudieran realizar situaciones de aprendizaje contextualizadas con base en quienes aprenden. Para ello, se buscarían prácticas socialmente compartidas, entendidas como acciones intencionadas, normadas culturalmente, en las distintas regiones del estado de Oaxaca.

Entonces, ¿cómo se organizó esta estrategia de intervención? Se trabajó con el desarrollo de los siguientes estilos de pensamiento matemático: pensamiento proporcional, pensamiento trigonométrico, pensamiento y lenguaje variacional, pensamiento exponencial y pensamiento funcional propio del precálculo. En cada uno de ellos se problematizó la matemática escolar; este proceso se consideró como un recurso para confrontar y desafiar la matemática escolar en los sistemas educativos, en contextos de significancia diferentes.

Para promover la problematización de la matemática escolar de los pensamientos mencionados, cada uno de los responsables de los seminarios realizó una problematización del saber matemático, es decir, un estudio a profundidad que permitió hacer del saber un problema a través de las cuatro dimensiones del saber que estudia la teoría socioepistemológica (Cantoral, 2013): social, epistemológica, cognitiva y didáctica, localizando y

Figura 1. Seminarios de desarrollo del pensamiento matemático de la MEMES



Fuente: elaboración propia.

analizando su uso y su razón de ser, es decir, el estudio de la naturaleza del saber de manera sistémica.

La PME propicia un cambio de relación con el conocimiento matemático escolar (Reyes-Gasperini, 2016; Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014; Reyes-Gasperini y Cantoral, en prensa; Reyes-Gasperini *et al.*, 2014), donde la nueva relación, sustentada en prácticas, genera una nueva dinámica para los profesores, ya sea en su gestión áulica —tareas encaminadas mediante situaciones de aprendizaje con contexto de significancia y situacional específicos—, en los aspectos actitudinales y psicológicos —generación de confianza, motivación e iniciativa de innovación— (Lee y Nie, 2014), así como en su práctica profesional —incorporación a una comunidad específica que le permite ser parte de un colectivo transformador, con base en un modelo radical del empoderamiento, que se sustenta en las teorías de transformación social cuyo objetivo fundamental es la emancipación individual y colectiva— (Bacqué y Biewener, 2015).

La propuesta: desde el individuo, pasando por lo colectivo, hacia lo social

El dispositivo de intervención precisa de la acción individual, parte del colectivo y pretende un impacto social. En términos de Bacqué y Biewener (2015), se reconocen tres dimensiones o etapas del empoderamiento, a saber:

> **Etapa individual o interior**: designa el proceso que permite a cada individuo desarrollar una "consciencia crítica" y su capacidad de acción. Esta pasa por la construcción de una imagen positiva de sí, por la adquisición de conocimientos y competencias que favorecen una comprensión crítica de su medio ambiente, por el desarrollo de recursos individuales y por la elaboración de estrategias para alcanzar objetivos personales y colectivos;
>
> **Etapa interpersonal, organizacional o colectiva**: designa el desarrollo de la capacidad de "actuar con" y de "actuar sobre";

> **Etapa política o social**: plantea la cuestión de la transformación de la sociedad en su conjunto, a través de la acción colectiva (Bacqué y Biewener, 2015: 41).

El dispositivo propuesto partió de las fortalezas de los interactuantes; de este modo se promovió la idea de una imagen positiva de sí mismos. En el trabajo con profesores la etapa individual se considera indispensable, a la vez que se trata de una decisión personal. Los procesos de desarrollo profesional docente ofrecidos contemplan la aceptación y deseo de permanencia por parte de los participantes. Nótese que las autoras caracterizan a la etapa colectiva como incluyente en la etapa social. La trascendencia de la organización colectiva proviene del impacto social. Este último, en palabras simples, es el objetivo de la propuesta: transformar la acción de educar matemáticamente a través del colectivo docente.

Saber matemático culto, técnico y popular

En diferentes artículos previos empezamos haciendo la siguiente distinción: la teoría socioepistemológica establece una clara diferencia entre tres áreas, Matemática, matemática escolar y matemática educativa. La primera es una rama del campo científico que produce conocimiento matemático con criterios de verdad y la desarrollan comunidades internacionales; la segunda es un derivado de los procesos de transposición didáctica de la primera; la tercera es otro campo disciplinar científico que estudia los fenómenos didácticos ligados al conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

Desde la socioepistemología se concibe, además, que el saber es el conocimiento en uso. Por tanto, examinamos el saber popular, técnico y culto, ya que las culturas, las disciplinas científicas en general y la Matemática, en particular, usan al conocimiento matemático de diferentes maneras. Todas ellas —igualmente importantes— conforman la sabiduría humana. Es importante aclarar la relevancia de hablar de la sabiduría humana como la fusión entre los tres tipos de saberes, ya que, por ejemplo, lo que hoy se concibe como saber culto hace unos años no lo era, o bien, dentro de unos años no lo será. Lo mismo ocurre con el saber técnico o popular. Por tal motivo, la trascendencia de los estudios socioepistemológicos radica en la flexibilidad en la articulación que le da operatividad a la fusión entre el saber sabio, culto y popular. En particular, en el caso oaxaqueño, este hecho fue de suma relevancia dada la fuerza cultural y el cúmulo de conocimientos que tiene la región, y cuya explicitación se vio como una necesidad desde que se comenzó a trabajar con el grupo.

El discurso matemático escolar (dME)

La matemática que vive en el sistema escolar es producto de una transposición didáctica que lleva al saber sabio, al saber enseñado (Chevallard, 1999); es decir, la obra matemática sufre modificaciones adaptativas progresivas con el fin de seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos matemáticos que serán incluidos en las unidades temáticas de la escuela y la universidad (*matemática escolar*). Asimismo, se sabe que los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se articulan a los currículos de matemática de los sistemas educativos, se suelen centrar en el tratamiento de los objetos matemáticos formales más que en la construcción social del conocimiento matemático por parte del estudiante; es decir, se entiende a la matemática escolar como un cúmulo de objetos abstractos o definiciones, anteriores por tanto a la praxis social y, en consecuencia, externas al individuo, en donde el profesor comunica o reproduce de la mejor manera posible lo que el currículo indica, en varias ocasiones carente de significado tanto para el estudiante como para el profesor.

A diferencia de la creencia generalizada de que la matemática escolar, como estructura objetivable del dME, es un ente que no puede alterarse, es evidente que sí es accesible a modificaciones; sin embargo, cualquiera sea su modificación, nunca perderá su estatus normativo y hegemónico. Por este motivo es que se propone una constante revisión y modificación que promueva el aprendizaje basado en el uso de las matemáticas. Una caracterización del dME que para la comunidad de matemáticos educativos es de gran importancia fue la realizada por Soto (2010), ya que sintetizó teóricamente los estudios realizados durante dos décadas respecto a este constructo que usó la teoría para evolucionar en la investigación. En su estudio enuncia lo siguiente: "El dME es caracterizado como un sistema de razón SR, que excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes y docentes) de la construcción del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica VS" (Soto, 2010: 91).

Reinterpretamos de esta caracterización, y en particular, de la investigación completa de la autora, que una vez realizada la síntesis teórica respecto al dME se despersonifica el problema del proceso de enseñanza —donde los responsables eran los docentes— o del proceso de aprendizaje —responsabilizando a los estudiantes— para hablar de un problema focalizado en el propio conocimiento matemático escolar.

El r-Rediseño del discurso matemático escolar

En la actualidad, aceptamos que el dME excluye la construcción del conocimiento matemático ya que sus lineamientos y fundamentos están regidos sobre las caracterizaciones de atomización de los conceptos, carácter hegemónico, carácter utilitario, falta de marcos de referencia, y también por considerar que la matemática es un conocimiento acabado y continuo (Soto y Cantoral, 2014). Por este motivo, la teoría socioepistemológica ha planteado desde sus inicios la necesidad de un r-Rediseño del discurso matemático escolar (rdME y RdME).

Hablar de r-Rediseño del dME tiene una doble acepción (Cantoral, 2013):

- **rediseño del discurso matemático escolar (rdME)**: refiere a la elaboración de propuestas de enseñanza basadas en una epistemología renovada, que será palpable en situaciones de aprendizaje llevadas al aula por los docentes. Aquí están las estructuras objetivables del dME: libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otras.

- **Rediseño del discurso matemático escolar** (RdME): refiere a una ruptura de orden epistemológico que precisa de un nuevo paradigma respecto al saber matemático, cuya transición se ha estructurado con base en los principios de la teoría socioepistemológica. Los elementos principales son: carácter funcional, racionalidades contextualizadas, validación de saberes (conocimientos construidos) y pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación.

Entonces, en contraposición —no como dicotomía, sino como divergencia— a "la matemática escolar" que vive en —y gracias al— *discurso matemático escolar* (dME), que se centra en los objetos matemáticos (definiciones, procesos, algoritmos…), se trabajó con el "saber matemático escolar" centrado en las prácticas asociadas a los objetos para promover un rediseño del dME. Esta distinción hace de la socioepistemología una teoría alternativa para fundamentar los objetivos de la maestría que la ENSFO (Oaxaca) se estaba proponiendo.

La divergencia entre ambas visiones se clarifica cuando alcanzamos la noción de "saber matemático escolar" como objeto de enseñanza y aprendizaje, cuya construcción se sustenta en la visión alternativa de la *evolución pragmática*. Años atrás hemos establecido esta diferencia desde la teoría socioepistemológica, haciendo mención de *la* matemática y *lo* matemático, como, por ejemplo: la trigonometría y lo trigonométrico (Montiel, 2011); la variación y lo variacional (Caballero, 2012; Cantoral, 1990; Cabrera, 2009); la periodicidad y lo periódico (Buendía, 2010); el logaritmo y lo logarítmico (Ferrari y Farfán, 2010); entre muchos otros. Es decir, lo que durante años se ha denominado teóricamente como el tránsito del conocimiento al saber, como sintetizó Cantoral (2013), se hizo explícito en la diferenciación semántica de las terminologías para con el conocimiento matemático: el *lo* y el *la*, no son sólo retórica.

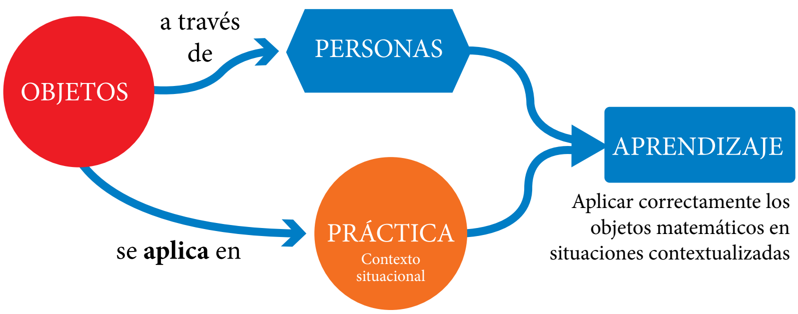
La noción de aprendizaje desde la teoría socioepistemológica

Dada esta nueva relación con el conocimiento matemático, tendremos una caracterización alternativa para la noción de aprendizaje. Esta se refiere al proceso de adquisición del conocimiento (de algo), ya sea a través del estudio y/o de la experiencia. En el área de matemáticas y, en particular, desde la postura socioepistemológica, diferenciamos entre el aprendizaje de la matemática escolar y el aprendizaje del saber matemático escolar.

El proceso de aprendizaje de la matemática escolar (*la* matemática) refiere a la significación de conceptos abstractos, dosificados al nivel escolar de enseñanza. Una de las maneras disponibles para abordar la significación se basa en la teoría de los registros semióticos de representación: el cambio de representaciones o símbolos será, entonces, la base del aprendizaje. Sobre ello, observamos dos dificultades: por un lado, la confusión de que la representación es el "nuevo meta objeto" (D´Amore *et al.*, 2015) y, por el otro, que, aunque se tenga una correcta transición entre las representaciones y un conocimiento de ellas, todavía así puede no encontrarse significado para "la vida del estudiante". Sin embargo, reconocemos una ventaja, pues este tipo de aprendizaje a partir de las distintas representaciones permitirá, posteriormente, aplicar el nuevo conocimiento adquirido a diversos problemas matemáticos escolares y darles la solución correspondiente.

El proceso de aprendizaje de la matemática escolar tiene sus inicios en una enseñanza y un aprendizaje basados en objetos que se aplicarán, a posterioridad, en tareas que tengan un contexto situacional determinado (Fig. 2). Es decir, se explicará de la mejor manera posible un tópico matemático y, más tarde, se aplicará este conocimiento aprendido en alguna situación de la vida real. La matemática escolar tiene una racionalidad universal que lleva a que las respuestas matemáticamente correctas habitualmente sean únicas. Esto permite una clara delimitación entre *lo que está bien* y *lo que está mal*, por tanto, agiliza y hace concreta la actividad de evaluar. En otras palabras, el dME enuncia lo que está fuera y dentro de la actividad matemática (Soto y Cantoral, 2014).

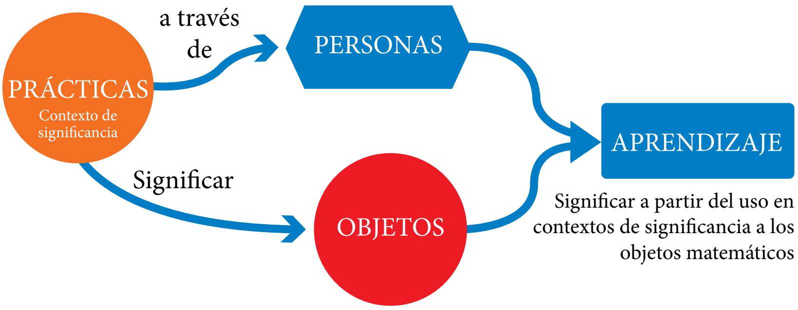
Figura 2. Aprendizaje centrado en objetos



Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, el proceso de aprendizaje del saber matemático escolar (Fig. 3) desde la teoría socioepistemológica de la matemática educativa refiere a la significación situada de los objetos matemáticos mediante el uso (*lo* matemático). *Lo que hago* construye conocimiento y desarrolla el pensamiento matemático. En lo que hago, aprendo. La garantía del aprendizaje no refiere, únicamente, a la correcta aplicación del conocimiento aprendido, sino a la habilidad de significar al objeto matemático mediante los usos del conocimiento, es decir, a partir de lo que hago puedo darle significados al conocimiento matemático abstracto. Diremos, entonces, que las personas *saben matemáticas*, en tanto evaluación, si pueden ponerla en uso dentro y fuera de la clase de matemáticas, dentro y fuera de la escuela (no basta resolver tareas típicamente escolares mediante técnicas más o menos sofisticadas). Si pueden usarla, aun antes de conocer su estructura axiomática formal, de esta manera estarán desarrollando su pensamiento matemático. Se pretende darle el estatus de *saber* al *conocimiento matemático escolar*, es decir, hacerlo funcional y dotarlo de significado mediante el uso, por

Figura 3. Aprendizaje centrado en prácticas



Fuente: elaboración propia.

encima de la resolución de tareas de la matemática escolar. De aquí nuestra concepción de la resignificación del conocimiento matemático: dar nuevos significados progresivamente.

Un programa basado en prácticas conlleva a una reestructuración de la noción de aprendizaje, la cual se sustenta en una racionalidad contextualizada y una visión socioepistemológica del conocimiento matemático. Un programa de este tipo precisará de una red de reestructuraciones que acompañen la evolución. Una de ellas son las *situaciones de aprendizaje*: herramientas didácticas sustentadas en *prácticas*. Las y los profesores oaxaqueños se encargaron de diseñar este tipo de situaciones durante su maestría.

La autonomía: de estudiantes de maestría a tutores

El episodio que vamos a mostrar a continuación tiene como protagonistas a Rebeca, Óscar y las y los profesores de la segunda generación de la MEMES. Óscar y Rebeca fueron seleccionados por su disposición e interacciones con la tutora del seminario de desarrollo del pensamiento proporcional, para formar parte de las tutorías de la segunda generación. Si bien el trabajo que realizamos (de aproximadamente cien horas reloj) y su análisis ha sido presentado en ocho episodios, mostraremos aquí una sección de un episodio (el segundo, en particular) para evidenciar el tipo de interacciones provocados y las reflexiones alcanzadas (Reyes-Gasperini, 2016).

Tutores: Rebeca y Óscar

Rebeca y Óscar son, como dijimos, estudiantes de la primera generación de la MEMES, destacados por sus reflexiones y su disposición a ser parte del proceso como tutores. Ella es licenciada en Matemáticas, con 17 años de experiencia docente. Su inquietud mayor siempre fue entender cómo piensan las personas. Él es licenciado en Ciencias de la Computación y en Educación Secundaria con especialidad en matemáticas. Profesor de matemáticas en una comunidad de Oaxaca desde hace once años. Ambos son los primeros profesionistas de sus familias, que provienen de zonas de trabajo humilde o marginal. Son miembros de un cuerpo docente que creó un programa alternativo de educación, pues no aceptaban la imposición de un currículo federal. Como profesores destinaron casi la mitad de sus sábados, durante más de dos años, al trabajo en la maestría. Una vez realizada la maestría dedicaron varias semanas de trabajo intenso para ser tutores de una nueva generación de la maestría. Son profesionistas de la educación que llevan la bandera de la transformación y que no aceptan cualquier oferta.

Contexto: trabajo colectivo

Con Rebeca y Óscar se trabajó durante un mes en jornadas intensas —los fines de semana y entre semana cuando terminaban sus clases—, para preparar lo que sería el seminario sobre el desarrollo del pensamiento proporcional titulado: de la proporcionalidad a lo proporcional. Ellos vivenciaron la tarea de resolver las actividades que estaban diseñadas, a la vez que plantearon cómo rediseñarlas para trabajar con los colegas de la segunda generación. Su misión era llevar a cabo las interacciones para promover la problematización de la matemática escolar.

El episodio: el plan de clases – la razón como cociente incremental

El episodio consta de un primer acontecimiento en el cual Rebeca propone discutir un plan de clase que se relaciona con la noción de semejanza revisada en un encuentro anterior. Esta sección tiene como objetivo problematizar la matemática escolar relativa a lo proporcional. Posteriormente, se promueve la interacción con los miembros de la segunda generación de la MEMES, cuyo objetivo es promover la problematización. Se desarrolla la discusión, contextualizada en la propia matemática, sobre la noción de razón como cociente incremental.

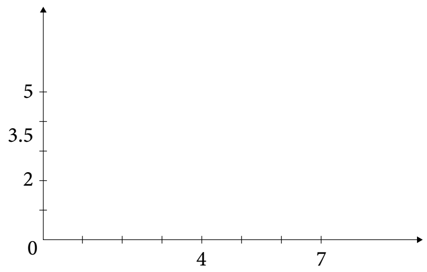
Acontecimiento A: razón como invariante

A partir de una tarea específica en el contexto propiamente matemático de la graficación, se desarrolla la diferencia entre la razón entre las variables y la razón entre las diferencias de las variables. Es decir, la diferencia entre la constante de proporcionalidad $\left(\frac{y}{x} = k\right)$ y la pendiente de la recta $\left(m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$ o la razón de cambio $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$. Se trabaja con una actividad de un plan de clase que se enuncia a continuación para comprender la discusión:

> *Se quiere ampliar una fotografía cuyas medidas son 4 cm de largo por 2 cm de ancho, de tal manera que el homólogo del lado que mide 4 cm, mida 7 cm en la fotografía ampliada, ¿cuánto deberá medir el otro lado?*
>
> CONTENIDO: 9.1.2*: construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.*
>
> INTENCIONES DIDÁCTICAS: que los alumnos verifiquen que los vértices de rectángulos semejantes que tienen un vértice común, son colineales.

• CONSIGNA: en equipos resuelvan el siguiente problema.

Tracen los rectángulos que muestran el tamaño de las fotografías de la sesión anterior sobre el siguiente plano cartesiano, ubicando uno de sus vértices en el origen de éste y tracen otros dos rectángulos semejantes a los dos primeros, de manera que coincidan con el punto (0,0). Expliquen cómo pueden saber que los dos últimos rectángulos son semejantes a los primeros.

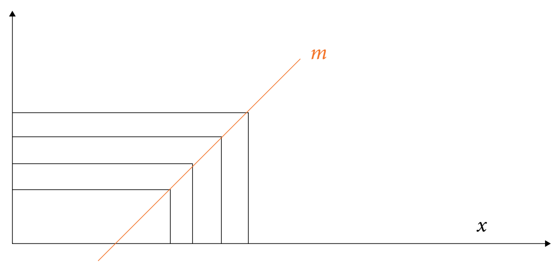


• Consideraciones previas:

Es probable que los alumnos justifiquen la semejanza estableciendo la razón entre los lados de los rectángulos dibujados; sin embargo, también se les puede preguntar qué se observa con respecto a los vértices que no están sobre los ejes del plano y establecer que todos ellos quedan sobre una recta, por lo que son colineales.

También se puede concluir que los segmentos paralelos entre dos líneas secantes son proporcionales; en este caso las secantes son *x* (eje horizontal) y *m* (línea) que une los vértices de los rectángulos (teorema de Thales).

Figura 4. La imagen del plan de clase



Fuente: elaboración propia.

Se comienza con la *Sección 1: la razón de las diferencias y la razón de las magnitudes* donde se analizará a Óscar y Rebeca construyendo la idea de la razón de las diferencias para analizar aquello que se mantiene constante más allá de la razón de las variables; para luego pasar a la *Sección 2: linealidad y proporcionalidad*, donde se estudiará el trabajo con los estudiantes (profesores) confrontando la idea de que, aunque una relación no sea proporcional, pero lineal, hay algo que se mantiene constante: la razón de cambio.

A. Sección 1: la razón de las diferencias y la razón de las magnitudes

Con el plan de clase en mano, se comenzó a cuestionarlo. Rebeca lee la consigna y afirma:

Rebeca: Y aquí te va dando la idea de homotecia, ¿no? Para que llegue hasta este punto, pero ya no es el mismo rectángulo.

La primera observación es que "no es el mismo rectángulo", basada en argumentos intuitivos de coincidencia de forma.

Rebeca: ¿Tú crees que sea el concepto de linealidad también?

Óscar: Yo creo que sí. Eso es lo que puse.

Rebeca: Concepto de linealidad, ¿la pendiente de una recta?

Óscar: Ajá, que es la misma razón. Tenemos que ver de qué se dan cuenta los alumnos, ¿de la línea?, ¿de la razón?

Se observa una relación directa entre las nociones de razón, constante de proporcionalidad y pendiente de una recta que, desde la previa problematización del saber matemático, como se dijo en el apartado de la propuesta de innovación, es importante distinguirlas de la siguiente manera:

$m = \dfrac{y}{x}$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
Constante	Pendiente	Razón de cambio

Rebeca: De la razón y de la semejanza, ¿no?

Óscar: De la semejanza.

Rebeca: No creo que lleguen al pensamiento de la recta.

Óscar: O decir "ah mira, aquí todas quedan sobre la línea".

Rebeca: Y que unan los puntos. Pero para decir que son ¿colineales?

Óscar: No creo. Creo que sí, eh, creo que sí. Con otras palabras. Digo porque hasta yo, pues, no dije colineales, dije que están sobre la misma línea. Entonces, pero… eso y que digamos, que pensemos que digan que son semejantes, que tienen los mismos ángulos si es que tienen fresco tratar con lo de la semejanza, yo soy malo para eso. Lo que no creo es que de inmediato den la razón, aunque se den cuenta que esa línea que vieron es la razón, es la pendiente. O sea, si van a ver la línea, yo creo que es lo primero que van a ver, ya si ponen atención… van a ver que son semejantes.

La discusión planteada entre Óscar y Rebeca pone en discusión la necesidad o no de la nomenclatura de los conceptos matemáticos en los comienzos de la explicación. En este caso, la idea de colinealidad y "estar sobre la misma línea" parecieran poder trabajarse de la misma manera, con el fin de que la precisión no deba sentirse como una obligación sino como una necesidad.

Cuando Óscar dice "hasta yo, pues, no dije colineales, dije que están sobre la misma línea", es para nosotros muestra de la importancia de que los profesores vivan la situación de aprendizaje, pues desde su propio cuestionamiento de la matemática escolar, surgen aspectos sobre la didáctica de la matemática específica.

Rebeca: Bueno cuando lo vi y lo hicimos en el salón, lo único que pude identificar fue que con eso daba algún principio de la semejanza que era que sus ángulos fueran iguales, y creía que eso iba a ser, que sus ángulos eran iguales, un principio de la semejanza. Y que sus lados iban a ser diferentes. Eso es lo único que observé. Y ahorita, platicando con Óscar, le digo que ya no… que el pensamiento de linealidad y la pendiente de la recta. Bueno, yo ahora puedo ver eso que antes no veía. Antes veía que establecían y dejaban bien claro ese principio de la semejanza [se refiere al de los ángulos].

Rebeca hace un análisis crítico de su actividad áulica de un periodo anterior a nuestros encuentros, donde reflexiona sobre la confrontación de las interacciones con sus estudiantes antes de la problematización de la matemática escolar, con las que podría provocar después de ella. Este es un ejemplo palpable de que, aunque se realice un rediseño de las estructuras objetivables, como libros de texto, programas, orientaciones didácticas y demás, si no se acompaña con procesos de desarrollo profesional docente, los cambios quedarán en los papeles, pero no en los hechos, sea cual fuere el enfoque teórico de dichos diseños.

Se retoma el enunciado de la tarea que refiere al teorema de Thales y se pregunta "¿se fijaron la gráfica que dibujan ellos?" (Fig. 4).

Daniela: ¿Qué tiene de particular?

Óscar: Que puede llegar a confundir sobre proporcionalidad, o sea… Porque esa razón se dice que son proporcionales [se interpreta que está refiriéndose a y entre x] y… pero aquí la están sacando del origen, no va a pasar por el origen esa línea.

Daniela: ¿Y entonces?

Óscar: Tal vez en ese momento no haya ningún conflicto, pero se están dando cuenta, posiblemente, que sí se mantiene una razón de cambio, un cambio proporcional en las figuras, en el momento que quieran llevarlo eso al plano cartesiano, ellos habrán visto que podía darse, este cambio, sin que esa línea pase por el origen. Creo que me estoy expresando mal.

Si bien la explicación de Óscar no es "transparente", puede interpretarse que está explicando, por la negativa, la necesidad de que la gráfica de la función proporcional sea una recta que pase por el origen: "un cambio proporcional en las figuras… ellos habrán visto que podía darse sin que esa línea pase por el origen" y este hecho les generaría confusión. Recordemos que se está retomando la idea de las fotografías que se amplían de manera proporcional. El cambio proporcional es resultado de la *relación* de los lados de la foto que mantienen la misma razón, pero en la gráfica se comete el error de sacarla del origen, lo cual cancela el invariante de la relación.

Adviértase que, si la relación no fuese sustentada en la *contextualidad* y en la *funcionalidad*, nuestra afirmación podría considerarse incompleta o errónea, dado que toda función lineal (proporcional y no proporcional) mantiene su razón de cambio constante; sin embargo, en el contexto específico de esta tarea, desde el comienzo se hace referencia a que la razón entre los lados de la fotografía debe ser constante.

Al analizar la gráfica Rebeca afirma: "Pues que es una constante de proporcionalidad y que van a… que va aumentando como de… el aumento es el mismo, sí y que no cambia". Se interpreta que la idea de que "el aumento es el mismo" está centrada en un razonamiento aditivo simple, lo cual Óscar refuta asegurando que eso llevará a los estudiantes a pensamientos erróneos.

Óscar: Yo vi primero aquí en la línea que no es proporcional. Ya tal vez me estoy adelantando y pensando que como no pasa por el origen no va a ser proporcional. Pero, además, decía yo, cuando empezó a explicar que, si se le sumaba pues no, no se va a dar. Porque si mide 1 y 4, suponiendo, le sumo 1 de ambos lados, en un lado meto el cien por ciento, bueno la razón sería 2 y del otro lado sería aumentó un 25 por ciento, la razón sería 1 sobre 25…

Daniela: ¿1 sobre 25?

Óscar: Punto cinco, la mitad, punto 25.

Daniela: Punto 25, 25 sobre 100.

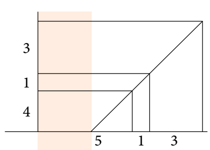
Óscar: Eso, aumentó 25 por ciento, entonces no es proporcional. Y nos lleva a una idea equivocada con los alumnos, el pensar que si le aumentamos la misma cantidad a una figura de los dos lados es un incremento proporcional, lo va a confundir precisamente que no es lo mismo cuánto aumenta a la forma en que aumenta.

Óscar usa dos ideas distintas para el aumento de cada uno de los lados. Para el primero, asegura que aumenta un 100 por ciento y por eso la razón es 2 (2 es a 1), mientras que, para el segundo, dice que aumenta un 25 por ciento y que la razón es 0.25. Si la razón fuera 0.25 la imagen debería reducirse, por lo cual, 0.25 no es la razón, sino que debería ser 1.25. Sin embargo, él se enfoca en cómo fue el aumento para cada uno de los lados, y dado que 100 por ciento no es lo mismo que 25 por ciento, concluye que no es un aumento proporcional. De esta manera argumenta por qué no puede decir que "si sumo lo mismo de ambos lados" el aumento es proporcional.

Se profundiza la explicación con Rebeca sobre esta diferencia de las sumas y se pregunta sobre cuál es la relación que sí se mantiene constante, ya comentada por Rebeca (razón de cambio).

Óscar: El hecho de que se le vaya sumando uno nada más. Eso se mantiene constante, pero no es la razón [está hablando de la razón entre las variables].

Daniela: Sí. Ahora. Sí podemos ver una relación, si ustedes anulan esta parte [parte azul de la imagen].



Rebeca: El triángulo, ¿no?

Óscar: Ah, sí. Pasaría por el origen que intersecta a la recta.

Rebeca: Este ángulo es constante [señala el ángulo de inclinación de la recta].

Daniela: Y la relación entre el lado de abajo… [refiere al incremento en *x*]

Rebeca: Y el de acá [refiere al incremento en *y*].

Daniela: Claro, esa relación también se mantiene constante.

Óscar: Ahora esa confusión es de los docentes también [risas].

Al "recorrer el eje de las *y*" se arman nuevas relaciones entre los segmentos y se observa que la razón de cambio, aunque no pase la recta por el origen, sí se mantiene constante. Se da el ejemplo del taxi donde lo que se mantiene constante es el valor de la ficha, aunque el banderazo se sume sólo al comienzo, a lo cual Rebeca agrega:

> Rebeca: Entonces es una recta $y = mx$ más algo.
>
> Daniela: Exacto, $y = mx + b$. Entonces, lo que no puede ocurrir es que su razón, entre el valor de *y*, en esta función el valor de *y* es $y = mx + b$. Las funciones de proporcionalidad son del tipo $y = mx$, entonces $\frac{y}{x}$ es igual a la constante. Pero $y = mx + b$…
>
> Óscar: Afín.
>
> Daniela: No vas a poder conseguir una constante, la relación entre esta variable y esta variable no va a ser constante.
>
> Óscar: Eso me costó mucho entenderlo. Es que la línea sigue… su pendiente sigue igual, entonces no cambia, es constante pensaba yo, pero no consideraba el hecho de que… veía igual que pasara por el origen, pero es la misma pendiente, pero no.

Óscar pone en palabras lo que para nosotros es la base fundamental de los conflictos con la linealidad y la proporcionalidad: para toda función lineal hay algo que se mantiene constante y es su razón de cambio, lo que se ve como la pendiente, pero sólo para la lineal proporcional, también es invariante la razón entre sus variables.

> Daniela: Pero fíjate, su pendiente se mantiene constante. O sea, su pendiente sí es constante.
>
> Óscar: Lo que difiere es el banderazo, lo que me cobran.
>
> Daniela: Claro, lo que difiere es el banderazo. A lo que tenemos que llegar es a explicar por qué la relación de proporcionalidad, si su relación entre las variables es constante, acá no. O sea, hay algo proporcional, sí, pero acá no es constante. Pero ¿que sí es constante?
>
> Rebeca: El incremento.
>
> Daniela: Exactamente, la relación: lo que crece.

Rebeca hace una aportación fundamental para esta tarea y para el desarrollo del trabajo: lo que se mantiene constante es el incremento (razón de cambio). Entonces, al haber trabajado con la idea de que la proporcionalidad está relacionada con la noción de "cómo crece" y cuya respuesta podría ser "de manera constante", ahora vamos a poner en duda esa noción, pues el aumento constante (razón de cambio) no garantiza la razón invariante entre sus variables (constante de proporcionalidad).

Surge la dificultad de observar las diferencias ($y_2 - y_1$ o $x_2 - x_1$) o la razón entre esas diferencias $\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$.

Rebeca: Pero los incrementos, aquí se mantienen constantes… cuatro, cuatro… aquí es cuatro, ¿no?

Óscar: Sí.

Rebeca: Aquí también es cuatro…

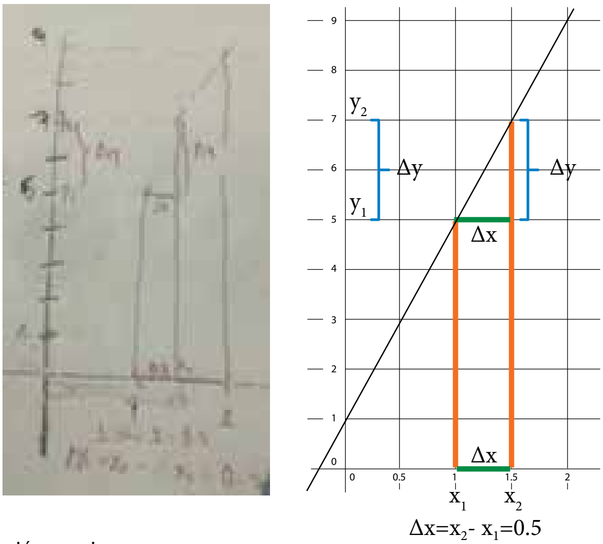
Óscar: Porque es la pendiente, ¿no? Es ésta [apoya una pluma sobre la recta para mostrar la pendiente] y esa sí se mantiene constante. Porque estás sacando eso del *y*, de los incrementos, eso de $y_2 - y_1$, sobre $x_2 - x_1$…

Rebeca: Y aquí mira, ¿por qué este es igual y esos son diferentes? Aquí es constante… ¿ya viste? Pero aquí no, las diferencias no son constantes, dirías tú, la pendiente sí, pero las diferencias no.

Hasta aquí se hace evidente que las diferencias no son constantes, entonces Daniela interviene y afirma "las diferencias no son constantes… ¿pero?", a lo cual Rebeca afirma, "pero sus incrementos sí", este hecho es ejemplo de la necesidad de pasar del comportamiento de la variable, al comportamiento de la relación.

A continuación se observa, en la Fig. 5, la idea de las diferencias y sus razones:

Figura 5. Imagen del pizarrón donde anotan los incrementos (izquierda). Reconstrucción del pizarrón (derecha)



Fuente: elaboración propia.

Rebeca: 1.5 - 1 y aquí sería 0.5. O puedo escribir que de acá a acá es el incremento de x_1 y aquí puedo decir que es el incremento de x_2, podría decir el incremento de x_2 menos el incremento de x_1, me va a dar 0.5.

Daniela: En realidad, es… un incremento es una diferencia… Tú aquí dirías, éste es x_2 [señala 1.5].

Rebeca: Ah, sí, este es x_1 [señala 1].

Daniela: Ok, y ¿cuál es el incremento?

Rebeca: El incremento de *x* es 0.5.

En este caso era necesario hacer una aclaración sobre el vocabulario matemático, ya que estaba siendo empleado de manera incorrecta. Nótese que el cuestionamiento del discurso hablado aparece cuando podría generar confusión dentro de la disciplina y no cuando se considera como utilización de un vocabulario informal.

Daniela: Va, ¿y dónde se ve en la gráfica?

Rebeca: Es la diferencia.

Daniela: ¿Dónde está esa diferencia?

Rebeca: Podría pensar que está acá [señala sobre el eje *y*].

Óscar: Aquí está [señala la distancia entre 1 y 1.5].

Daniela: Si x_2 es todo esto [señala el segmento de 0 a x_2], menos x_1 que es todo esto [señala el segmento de 0 a x_1], ¿qué me queda?

Rebeca: Ese pedacito [señala el incremento en *x*].

Daniela: Va. Y el incremento de *y*, ¿cómo lo ves?

Rebeca: De acá a acá, que sería y_1.

Daniela: Ok.

Rebeca: Entonces, el incremento de *y* sería $y_2 - y_1$. Es este pedazo que ves de acá a acá.

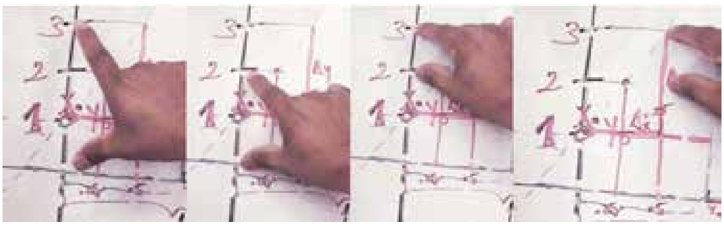
Daniela: Fíjate, este pedacito lo puedes llevar hasta acá.

Rebeca: Sí, y éste *y* lo puedo llevar hasta acá… Ah, ahora ya entendí lo de las diferencias.

La graficación se convierte en un marco de referencia donde significan las fórmulas que se presentan en la matemática escolar. Con la ayuda de la representación gráfica de la función se confronta la idea de las diferencias y los incrementos: al observar dónde es que se puede asegurar que la razón de cambio es constante, se percibe la razón de las diferencias y a la vez, de manera gráfica, se identifica la pendiente. La gráfica no es la re-presentación (del volver a presentar), sino es un espacio de construcción de conocimiento.

Se hacen varios ejemplos para comprender cómo visualizar en el gráfico la idea de los incrementos.

Figura 6. Visualización de Δy. En orden indica: y_2, y_1, la diferencia, y el correspondiente en otra abscisa



Fuente: trabajo realizado por Óscar en una sesión presencial.

Hubo dificultad en la interpretación de que la razón de las diferencias es la que se mantiene constante y no las propias diferencias. Este hecho puede considerarse indicio de la necesidad de profundizar en ello. A esta altura, Daniela hace la siguiente intervención:

Óscar: Entonces en todos los triángulos que tenemos ahí, todos los triángulos son proporcionales, semejantes.

Daniela: Fíjense. La relación entre las diferencias es constante. Las "diferencias" es preguntarnos "cuánto cambia", ¿no? Entre éste y éste, ¿qué pasó?, ¿cuánto cambia? Y después lo restamos, encontramos las diferencias. Y mi relación, en este caso, va a ser una razón… ¿Cuánto cambia? Es el incremento, Δy e Δx. Y ¿cuál es el nombre que nosotros le damos también a la pendiente? Razón de cambio, entonces, eso es la relación entre los cambios. ¿Quiénes son los cambios? Δy y Δx. Entonces la razón de cambio significa la relación entre estos cambios (Δy y Δx) que, aunque esté en una recta que no pase por el origen, se mantiene constante. ¿Pero qué es lo que no se mantiene?

Óscar afirma que los "triángulos" que se forman entre los incrementos son semejantes; inferimos de ello la idea de la pendiente como invariante. Luego, se discute cómo puede interpretarse la idea de "razón de cambio", siendo *la razón* un tipo de relación específica y *el cambio* trabajado como los incrementos tanto en x como en y. A continuación, se discute sobre cuáles relaciones se mantienen constantes y cuáles no.

Óscar: Las diferencias son las que no se mantienen constantes. Ahí es –2, ahí es 3, ahí es –8… eso es lo que no se mantiene constante, pero la razón de cambio sí.

Daniela: ¿Qué es lo que nos garantizaba que fuera de proporcionalidad en una tabla de valores?

Óscar: Que la razón de cambio fuera constante… la razón… entre las…

Daniela: ¿Qué pasaba siempre en esta función ($y = kx$)?

Óscar: Que esa relación se mantiene constante [señala $\frac{y}{x} = k$]

Daniela: Acá tengo que la razón de cambio se mantiene constante [indica una función lineal no proporcional expresada en su manera tabular].

Óscar: Pero no la razón entre x y y.

Daniela: Entonces, la idea es, aunque mantenga la razón de cambio, la relación [razón] entre las magnitudes no se mantiene constante. Y la relación entre las magnitudes ¿qué es? Nosotros podemos decir relación lineal, relación cuadrática, relación cúbica… entonces podemos decir es una relación lineal, entonces la razón de cambio se mantiene constante. Pero mi pregunta es… ¿es de proporcionalidad o es afín? Porque si es de proporcionalidad, ¿qué va a pasar?

Óscar: Se mantiene constante la relación entre x y y.

Daniela: Si es afín, no se mantiene constante esa relación, pero en ambos casos…

Óscar: La razón de cambio se mantiene constante. Eso no lo habíamos visto. Esa es la gran confusión de "pero es línea".

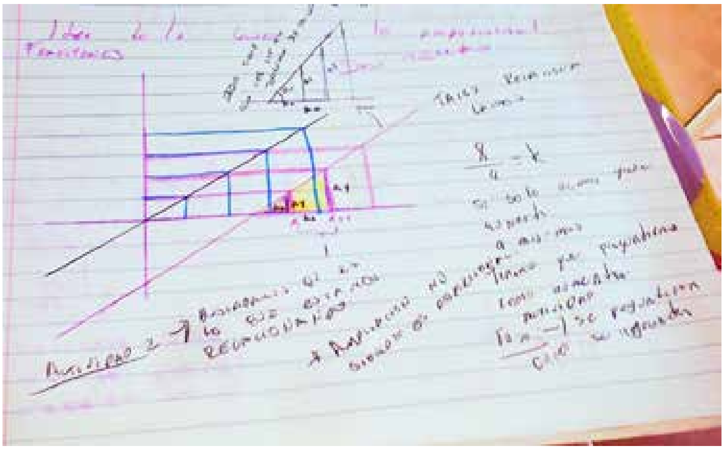
A esta altura, con ejemplos, contraejemplos y las interacciones donde la razón se trabajó como comparación y se construyeron distintas relaciones, se comenzó a trabajar la diferencia entre linealidad y proporcionalidad, desde la matemática formal, vista la linealidad como una función afín (con ordenada al origen distinta de cero).

Concluida esta interacción, se tomó la decisión de incorporar la discusión sobre este plan de clase para analizarlo en la sesión del seminario; fue Rebeca quien guio la discusión.

A. Sección 2: linealidad y proporcionalidad

En la última sesión se dejó de tarea la revisión del plan de clase. A continuación mostramos (Fig. 7) lo que Rebeca había preparado en su cuaderno para discutir con los profesores de la segunda generación:

Figura 7. Diseño de la tarea, según Rebeca, a discutir con estudiantes (profesores)



Fuente: trabajo realizado por Rebeca de manera individual.

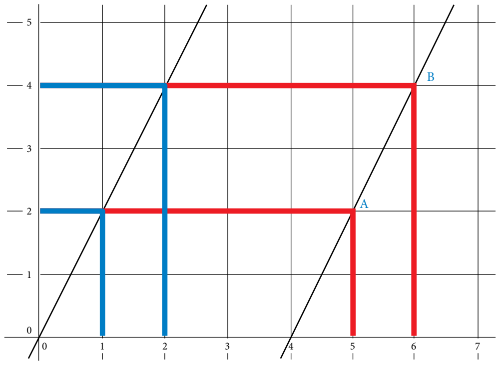
Si bien se pueden leer varias ideas en sus anotaciones, hay tres en particular de nuestro interés: "<u>Actividad 2</u> → buscamos qué es lo que estamos relacionando"; "tenemos que preguntarnos cómo aumenta. Actividad <u>FOTO</u> → se preguntan cómo se agrandan" y la carencia de números en su gráfico. Las tres muestran la relación al saber, sustentada en la *funcionalidad* por parte de Rebeca, ya que en su planeación, realizada sin supervisión, no utiliza números y está centrada en preguntas del tipo "relación". Esto es evidencia de que la discusión que quiere emprender no tiene que ver con el correcto proceder numérico, sino con la noción fundamental de la proporcionalidad: la relación como razón invariante entre las magnitudes. Se interpreta que el objetivo es mostrar la diferencia entre la razón constante entre las variables $\left(\frac{y}{x}=k\right)$ y la razón constante entre las diferencias $\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k\right)$.

Durante la clase, Rebeca plantea la situación a discutir:

Rebeca: Cuando me dicen que los vértices que tengo… que si son suficientes los argumentos de que "si uno los vértices colinealmente voy a tener siempre… [voy a] establecer esa relación de semejanza entre los triángulos". Porque me da en este caso, y en las consideraciones previas me dan el otro. Entonces voy a ver que no siempre se cumple. En este caso, que sean semejantes estos triángulos y en este caso si son semejantes, sí puedo decir lo mismo. Quiero ver si este rectángulo, si es semejante a éste y es semejante a éste. Y si en el rectángulo rojo establezco la semejanza entre los rectángulos, a partir de la colinealidad de mis puntos, de mis vértices.

Su planteamiento parece confuso, sin embargo, busca confrontar la afirmación sobre la colinealidad que garantiza la semejanza, retomando la idea, expresada en el plan, que asegura que la unión de los vértices colineales establece una relación de semejanza entre los rectángulos (Fig. 8).

Figura 8. Representación del texto de Rebeca en la cartulina



Fuente: elaboración propia.

E1: Existe una proporción directa en la proporción entre los ejes *equis* y *ye*, directa. En este caso, de 1 le corresponde 2, de 1 a 2, también le corresponde 2, de 2 a 4 también le corresponde 2. Y en el otro caso no, de 4 a 5 le corresponde… 5 le corresponde a 2 y luego 6 le corresponde a 4. Entonces, no hay una proporción, porque si yo divido 2 entre 5 no es lo mismo que 4 entre 6.

Rebeca: La primera es 5 entre 2, 6/4 y 7/6.

E2: No se me mantiene constante.

En el contexto gráfico los estudiantes (profesores) construyen la idea de que la razón entre sus variables no es constante, aunque sin duda refiere a una función lineal.

E3: A mí me brinca aquí una duda. Yo sabía que para que haya semejanza los puntos son cortados por una diagonal, se llaman puntos colineales. Deben ser que todos los puntos sean colineales en una recta y eso también es semejanza. Pero aquí ya me está… ya se me está moviendo todo, ¿no? Yo tenía eso, pero ahorita se me está moviendo. No encuentro la relación ahora, esa es mi duda.

El estudiante E3 está en el momento exacto para "aprender", dado que aquello que para él era seguro, ahora se pone en duda mediante una situación particular. Lo que es expresado por E3 era el objetivo que se quería lograr con la tarea planteada.

Rebeca: Por eso yo les preguntaba si era suficiente decir… ¿establecer esa colinealidad entre los vértices era suficiente para decir, para establecer ese criterio de semejanza? Y aquí, puedo observar en éstos… aquí ($y = 2x$) hay una colinealidad, pero también aquí ($y = 2x - 8$)y si lo veo así, como decía…

E3: Sí, yo estoy viendo semejanza de los puntos colineales. Lo que pasa es que aquí hay otros puntos colineales, entonces es este rectángulo con este otro y con este otro. Entonces desde ese punto de vista no son rectángulos.

Dada la observación de E3, Rebeca explica de manera clara cuál es la discusión que quiere llevar a cabo con el grupo sobre la suficiencia de la colinealidad para hablar de semejanza. E3 expone nuevamente su postura de que la semejanza se relaciona con la colinealidad y termina agregando la justificación de que "desde ese punto de vista no son rectángulos", a lo cual, una estudiante (profesora) lo confronta:

E2: Sí me gustaría complementar lo que acaba de decir el compañero. Sí se forman rectángulos y van a seguir siendo triángulos rectángulos, pero la razón de éste entre éste [refiere al cociente incremental considerando los puntos (5,2) y (0,0), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{5-0}$] no es la misma que éste [refiere al cociente incremental considerando los puntos (6,4) y (0,0), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{6-0}$], si observamos aquí está al doble [refiere al Δy que para los primeros puntos es 2 y para los segundos es 4]. Sí, pero aquí ya no es, es lo que hacíamos con el primer ejercicio de las fotos ¿sí? Si la jalamos hacia un lado, y no le aumentamos lo mismo, no va a ser proporcional, aunque estos puntos van a seguir siendo rectángulos. Yo ahorita recordé esto porque así lo maneja, cuando nos dijeron que comparáramos las situaciones. Primero estaba en la misma idea, cuando iniciamos la clase, de cuáles eran semejantes y no. Y luego, cuando vimos las fotos y cuando empezamos a mezclar otro tipo de informaciones y me voy a esto, pero el libro de texto que yo revisé, porque yo doy terceros, también manejan lo mismo.

E2 retoma la reflexión cualitativa en un ambiente cuantitativo: la idea que en el episodio anterior (no tratado en este artículo) era "jalar la foto", y que no se podía hacer porque desfiguraba la imagen, aquí refiere a que el jalar la foto se transforma en hablar de incrementos y su razón, es decir, del cociente incremental. Con esto, Rebeca logra confrontar la idea de la constante de proporcionalidad con la idea de la razón entre las diferencias.

E3: Con lo que dice E2, a mí me sigue quedando la duda. Son rectángulos, ¿no? Entonces, son colineales. Entonces ¿ahí no hay semejanza? [dibuja en el pizarrón rectángulos encimados].

E2: Ahí sí, porque coinciden todos sus vértices en el mismo punto. No… En el centro.

E3: Entonces, si hago yo… estoy así, aquí está tu cero [hace lo mismo que hicimos en la Sección 1 de "trasladar el eje *y*" hasta la raíz de la otra recta] O sea, nomás recorrí el eje de las *yes*. Si estaba aquí lo recorrí hacia acá. Este es el eje de las *yes*, y aquí está tu semejanza.

E2: Sí, pero tú, lo que acabas de decir ahí no coinciden todos en el centro. En éste que está aquí no coinciden como en ése. No coinciden en el centro del rectángulo.

E3: Pero ¿estamos buscando la semejanza entre éste y éste? ¿O de éste con éste?

Todos: No, todo el rojo.

En este diálogo se evidencia la importancia de definir la referencia. Al comparar las relaciones es necesario tener claro cuáles son los segmentos que se comparan. Nótese que hablamos de "segmentos", pues los estudiantes (profesores), cuando comparan con sus dedos, refieren a una razón de diferencias, de segmentos o sólo de números dependiendo del tipo de argumentación, y cada uno de ellos tiene una interpretación particular. Asimismo, lo que se plantea es la necesidad de distinguir de manera precisa la referencia, pues este hecho es el que provoca equivocaciones al comparar dos rectángulos que no deberían ser comparados.

E1: Pero si analizamos más allá del rectángulo como tal… éste es un cuadrado, éste es un rectángulo, éste es un cuadrado… pero si vamos más allá con el conocimiento y analizamos las propiedades de los cuadriláteros dicen que su diagonal se corta en su punto medio. Entonces, si yo trazo una diagonal acá se está cortando en su punto medio. Y puedo afirmar entonces que este triángulo es semejante a éste. Por compartir una misma diagonal puedo decir que el criterio lado-ángulo-lado, es congruente. Son congruentes. Entonces, sí es congruente este triángulo con este triángulo. Por lo tanto, también es congruente este triángulo con este triángulo. Por lo tanto, puedo deducir que este triángulo es congruente…

Todos: Semejantes.

E1: Semejantes, semejantes, gracias. ¿Por qué criterio? Porque simplemente comparten el mismo ángulo y este ángulo es igual a 90 grados, ángulo-ángulo. Entonces puedo decir sí es proporcional este rectángulo con respecto a éste. Analizando el rectángulo desde el punto de vista de la congruencia de triángulos, de los criterios. Sin embargo, con este rectángulo ya no [refiere al rectángulo rojo]. Con este rectángulo ya no es congruente, porque mira dónde está la diagonal. Ya no se cortan en su punto medio. Entonces, yo creo que sí entran en juego otros conocimientos y que al final de cuentas estamos hablando de otros criterios que me pueden reafirmar el conocimiento matemático, tanto mío como el del chamaco.

Dentro del contexto matemático, en particular el geométrico, E1 construye un argumento a partir de las propiedades de los cuadriláteros para hablar de la semejanza de los cuadriláteros mediante la comparación de segmentos.

E4: Se acuerdan, uno de los ejercicios de los que partimos fue de la homotecia, que veíamos que la proyección era distintiva y que hablaba de una idea proporcional. Entonces si nos valemos de ese ejemplo, ahí lo podemos enlazar con éste y ver la diferencia ahí clarita. Incluso con el propio trabajo de lobos, cuando decíamos que se hacía la ampliación veíamos que el otro entonces era una deformación que estaba trasladada en el plano, cuando veíamos las fotografías. Entonces, ahí más o menos podemos ir viendo cómo desde un principio lo estábamos viendo que era algo distinto y ahora lo estamos viendo un poquito más concreto, pero es eso. Estaba en lo de las niñas y luego en lo de las fotografías.

La secuencia de las tareas tiene una evolución determinada que es percibida y evidenciada por E4: asegura que, esta situación, la cual proviene de la discusión contextualizada en la propia matemática escolar, se correlaciona con dos tareas previas.

Rebeca: Y en este caso ¿cómo podemos establecer las relaciones entre las variables?

E1: Dos es a uno, en este caso.

Rebeca: ¿Y el otro?

E2: No es proporcional pero sí hay una constante. Mantienen la misma constante y podemos encontrarla formando los incrementos. Bueno, voy a tomar las coordenadas: y_2 sería 4 y 4–2 sobre 6–5. ¿Sí? Entonces va avanzando dos, entonces la ecuación de ésta ya la podemos ir encontrando que era lo que nos decía hace rato que era parte de la tarea. Y entonces aquí si yo quiero encontrar la ecuación… Vamos a buscar la ecuación…

En la pregunta de Rebeca, centrada en la acción de *relacionar*, se evidencia la relación sustentada en la *funcionalidad* que hemos percibido en su planeación, lo cual da evidencia de que se parte de la reflexión y se consolida en la acción el objetivo planteado. No pregunta por valores numéricos, sino por el tipo de relación que debe establecerse.

La frase de E2 es de relevancia: "no es proporcional, pero sí hay una constante". Con esto se sintetizan las ideas principales de esta actividad: muestra las diferencias entre linealidad y proporcionalidad, al confrontar la razón entre las variables y la razón entre las diferencias, pues con la función de proporcionalidad y la función lineal no proporcional, muestra las relaciones. E1 habla de que la relación es "2 a 1", correspondiente a la gráfica de la función cuya expresión es $y = 2x$, mientras que, para la función cuya expresión es $y = 2x - 8$, E2 recurre a los incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{6-5} = 2$$

Con ello, asegura que "se mantiene la misma constante", dado que en la otra función también la razón de cambio es 2. Para concluir propone buscar la expresión algebraica de la función, desconocida para ellos. A lo cual Óscar objeta:

Óscar: ¿No te alcanzaría comparando nada más las diferencias que encontraste?

E1: Exactamente.

Óscar: Sí, mencionaste… las diferencias… ¿no te alcanza nada más comparando las diferencias? Podrías compararlas… ¿no te alcanza con eso?

E2: Sí, pero dame un segundo… voy a asimilar a dónde quiero llegar.

[Silencio]

La ecuación sería ésta ($y = 2x - 8$), éste es el punto donde va a cortar al eje de las *yes*, entonces es lo que yo explicaba hace rato allá en el aula que las coordenadas (0,–8) y (4,0) y cualquier punto es como va a quedar. Ésta es la ecuación de ésta. Y pues ésta es más sencilla, ésta es $y = 2x$.

Óscar interviene para mostrar que a partir de los datos que tiene, E1 ya tenía la razón de cambio y por tanto podía encontrar la expresión algebraica de la recta. E2 se queda en silencio unos segundos y piensa cómo podría, dado el comentario de Óscar, encontrar la expresión de la función sin aplicar lo que escolarmente se enseña: dados dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), en este caso (5,2) y (6,4), encontrar la pendiente de la recta como $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y luego reemplazar alguno de los puntos dados y m en $y = mx + b$, quedando $y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1 + b$ y despejar b para conseguir la expresión algebraica de la función. La propuesta de Óscar radica en cuestionar la automatización con la cual, a veces, se trabaja, pues, E1 podía encontrar la ordenada al origen con la información disponible, con base en la razón de cambio, sin llegar al manejo algebraico de los datos.

Luego de encontrar las expresiones algebraicas de ambas funciones, Rebeca comenzó a cerrar la discusión:

Rebeca: Bueno, entonces, para que sean semejantes, hay una condición muy fuerte.

E4: Su razón tiene que ser constante.

Rebeca: Sí, y además… hay otra más.

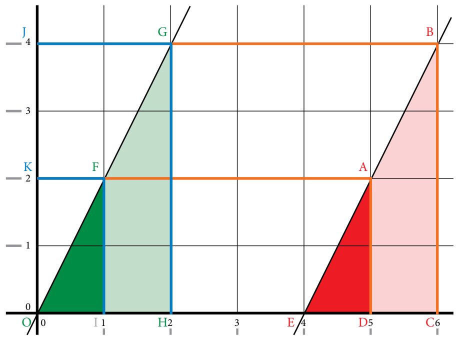
E5: Como decía el compañero, la razón $\frac{x}{y}$ tiene que ser constante y la única que lo cumple es la que pasa por el origen. Si no pasa por el origen, no es proporcional. No pasa nada más por la colinealidad, tiene que pasar por el origen para ser proporcional.

Al retomar la pregunta de partida de Rebeca "si era suficiente establecer la colinealidad entre los vértices para establecer el criterio de semejanza en los triángulos", E4 y E5 concluyen que la condición para hablar de semejanza se relaciona con que la razón se mantenga constante y, a la vez, la colinealidad no garantiza la semejanza, pues las funciones lineales no proporcionales no mantienen dicha razón.

Rebeca: Entonces, aquí cerramos y entonces, ¿qué podemos decir del plan de clase?

E6: Lo que pasa es que ahí también causa un problema porque mencionan el teorema de Thales. Y el teorema de Thales nos dice que los segmentos paralelos entre dos secantes ($\overleftrightarrow{EA}$ y $\overleftrightarrow{EC}$) son proporcionales. Y eso es lo que nos causa confusión, a veces nos queremos ir con ese teorema para querérselo aplicar a todo. Y en este caso queremos buscar la proporcionalidad entre éstos $\left(\frac{\overline{DA}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BJ}}\right)$ pero vamos a tener que comparar triángulos $\left(\frac{\overline{IF}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OH}}\right)$ y comparamos también éstos (*OIFK* y *OHGJ*), y en este caso sólo habla de éstos (*DA* y *CB*), que son los paralelos entre las secantes. No nos habla de éstos (*KA* y *JB*).

Figura 9. Reproducción de lo presentado en el pizarrón



Fuente: elaboración propia.

Lo que nos explica E6 respecto al programa es que, tal como está presentada la figura, no puede compararse el tamaño de los lados de las fotografías. Recordemos que todo comenzó hablando de la ampliación de fotografías, entonces, los segmentos que él señala, que nosotros hemos denominado $\overline{KA}$ y $\overline{JB}$ son los que deben compararse respecto a los segmentos $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, para garantizar que las fotos (los rectángulos) son semejantes.

E2: Y sí son proporcionales… sí va a existir proporcional, con respecto a la secante, si yo me olvido del resto [recorre el eje hasta el punto E]… éste [$\overline{ED}$] en relación a éste [$\overline{EC}$] es proporcional a éste [$\overline{DA}$] en relación a éste [$\overline{CB}$]. Y eso es lo que maneja el teorema de Thales, lo estamos partiendo de aquí [señala el punto E], no desde atrás. No como rectángulo, sino como los triángulos rectángulos que se forman entre las secantes.

Rebeca: Entonces…

E7: Entonces estaría mal lo del plan de clase, ¿no? Porque está tomando el rectángulo. Aun así, está mal ejemplificado en la clase porque está manejando rectángulos; si quería usar el teorema de Thales tendrían que haber sido paralelas, pero si ya querían que fueran semejantes tendrían que haber partido del (0,0), para poder usar los triángulos y que pudiera haber proporcionalidad.

Rebeca: Entonces, éste es el análisis que se tenía que hacer en la figura.

E2 explica por qué sí son proporcionales los triángulos rectángulos, aunque esté fuera del (0,0), ya que compara sólo los segmentos que forman los triángulos. E7 toma la palabra para asegurar que, aunque se cambie de lugar "el eje *y*", el plan de clases tiene un error conceptual, ya que la tarea plantea la comparación de los segmentos de los rectángulos y no de los triángulos únicamente, y asegura que la recta debería haber pasado por el origen para hablar de la proporcionalidad entre los lados de la figura. De esta manera, Rebeca da por terminada la reflexión sobre la tarea planteada.

A.3. Síntesis analítica del acontecimiento A

Para analizar la tarea presentada en el plan de clases fue indispensable no olvidar el hecho de que se estaba trabajando con la ampliación de una fotografía, pues esa *contextualidad* fue la que garantizó pensar en los lados homólogos de los rectángulos y solicitar indiscutiblemente que la representación gráfica de la función fuera una recta que pasara por el origen, pues de otra manera las comparaciones e igualaciones no conservarían el invariante. Con esta tarea, contextualizada, se da una significación a la necesidad de que la representación gráfica de la función proporcional pase por el origen: así, la razón entre los pares de lados homólogos se mantiene constante, es decir, la razón de los incrementos es constante. La *resignificación* de la tarea en un contexto gráfico permite la construcción de la noción de incrementos y de la razón de estos incrementos. Cuando se dice "construcción" no significa que sea la primera vez que ellos abordan el tema, sino que es un argumento que surge a partir de las propias acciones de *relacionar, comparar, construir un invariante* e *igualar*, lo que demarca, a su vez, la relación sustentada en la *funcionalidad* en un contexto matemático formal. Esta funcionalidad permite pasar de ver la diferencia de estados de cada variable a ver la razón de esas diferencias, es decir, dentro del contexto matemático, pasar de ver la variación de la variable a ver la variación de la relación.

En este episodio se trabajó la construcción de la razón de las diferencias. Podemos postular, ya que ésta es una de las grandes dificultades del aprendizaje de la noción de derivada como variación en el cálculo, que un aprendizaje de este estilo puede contribuir al entendimiento del pensamiento variacional: la construcción de la pendiente como razón de las diferencias permitirá posteriormente una fluencia mayor al hablar de la razón de las primeras, segundas, terceras… diferencias.

El rol del profesor en el aula, si bien puede provocar discusiones mediante el planteamiento de preguntas, también debe tener la habilidad de comprender lo que sus estudiantes están construyendo. En la interacción presentada, Rebeca tiene reducidas intervenciones en cantidad, sin embargo, son intervenciones estratégicas que dan orden a las construcciones de los estudiantes (profesores). La habilidad de enseñar, para nosotros, no tiene que ver únicamente con lo que —ni con el cómo— un profesor vaya a exponer, sino con lo que un profesor permita construir y discutir, a la vez que entender de dicha discusión.

Como pudo observarse en las interacciones, tanto Rebeca como Óscar son parte de la problematización y, en particular en este episodio, es Rebeca quien lleva el control y promueve las interacciones. La autonomía es evidenciada dado que el trabajo promovido por Rebeca dista de las confusiones ya evidenciadas entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo (Hart, 1998; Lamon, 1999; Lesh *et al*., 1988); a partir del análisis y problematización de una propuesta de clase se genera la significación de la diferencia. Lo sintetizamos de la siguiente manera: podemos asegurar que la constante de proporcionalidad no es la pendiente de la recta ni la razón de cambio; la constante de proporcionalidad es la relación invariante entre dos magnitudes que, al momento de graficarla en un plano cartesiano, coincide con el valor de la pendiente, y vista desde un pensamiento variacional, coincide con la razón de cambio. Es decir, si definimos los conceptos matemáticos mediante su uso y su funcionalidad, las diferencias son indiscutibles.

La propuesta de intervención luego de la problematización de la matemática escolar

Exponer las fortalezas de los profesores en este artículo, significará mostrar las actitudes de transformación en cuanto a su relación con el conocimiento matemático, o bien, la innovación en situaciones de aprendizaje en donde se pongan en el centro las acciones del estudiante. Elegir un contexto situacional que propicie la construcción de un conocimiento específico que sea acorde a los estudiantes con quienes se está trabajando, que reconozca el espacio natural de construcción de conocimiento y la realidad del que aprende, serán características básicas de las propuestas que presentamos a continuación.

La propuesta de Rebeca: los colores

Durante la maestría le dieron el cargo de profesora de artes. Al finalizar la maestría articuló el trabajo realizado durante el seminario de desarrollo del pensamiento proporcional con el arte.

Por iniciativa propia, propuso abordar el círculo cromático desde una mirada matemática: mezclando colores primarios, con razones diferentes, propuso formar los colores secundarios. Luego, a partir de las mezclas con el mismo color, trabajaría con la comparación entre las razones numéricas, correlacionando que los colores iguales tendrían razones equivalentes.

En esta propuesta, Rebeca había sistematizado la noción de *lo proporcional* como aquella relación adecuada entre magnitudes que mantengan un invariante, en este caso, el color, para que posteriormente se estudien los elementos característicos, tanto cualitativos como cuantitativos. De la acción de formar colores, pasó al análisis de los objetos matemáticos: la razón, proporciones y la constante de proporcionalidad.

Logró fundamentar teóricamente un diseño de intervención en cuanto a la manera en la que promueve la construcción de la noción de la proporcionalidad a través de las prácticas en la práctica de referencia del arte.

Fotos de la interacción con profesores y profesoras de la segunda generación de MEMES, en la sesión donde Rebeca puso en práctica su diseño

Reflexiones finales

El crecimiento profesional docente autónomo como parte de la práctica ubica a éste en en un rol activo. El ejemplo de Rebeca, reportado en este artículo, marca una iniciativa de transformación de su práctica en la cual incorpora los conocimientos y habilidades personales a la situación en la cual se encontraba: fusionar las matemáticas con el arte respecto a los colores primarios, secundarios y las proporciones. Otros ejemplos de las investigaciones realizadas por los profesores de la MEMES-ENSFO podrán consultarse en este mismo número de *Perfiles Educativos* a cargo de Óscar Cervantes y Adolfo Acevedo. Asimismo, otros colegas también desarrollaron sus propuestas de intervención: entre ellas está el caso del profesor Rigoberto Díaz, quien trabajó con la unidad de medida de la jícara para construir la idea de volumen y capacidad. Pronto realizará su presentación de examen. O bien, el caso de la profesora Isabel Sánchez, quien fundamentó teóricamente un diseño sobre la construcción de un papalote que ella misma trabajaba en sus clases; durante los cursos, mencionó, evidenciaba y explicitaba el pensamiento trigonométrico y proporcional que se ponía en juego en dicha construcción. Así, cada profesor/profesora pensó, inventó y plasmó en sus aulas sus ideas. Algunos de ellos, pocos, han escrito sus logros para convertirlos en tesis. Algunos de ellos, la mayoría, han transformado su quehacer. ¿Cómo lo sabemos? Porque continuamos en contacto, dado que hoy podemos decir que somos parte de la comunidad de matemáticos educativos.

El acompañamiento posterior al trabajo colectivo resulta indispensable. Las y los profesores con los que se trabaja a diario reclaman que los procesos de desarrollo profesional docente precisan de un trabajo continuo, permanente, cuya retroalimentación marque un rumbo.

Referencias

Bacqué, Marie-Hélène y Carole Biewener (2015), *El empoderamiento. Una acción progresiva que ha revolucionado la política y la sociedad*, Buenos Aires, Gedisa.

Buendía, Gabriela (2010), "Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 13, núm. 4, pp. 129-158.

Caballero, Mario (2012), *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cabrera, Luis (2009), *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato,* Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cabrera, Luis (2014), *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. Un estudio de caso*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, Ricardo (1990), *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Simbiosis y predicción entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo analítico"*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.

Chevallard, Yves (1999), "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

D´Amore, Bruno, Martha Fandiño, Maura Iori y Maurizio Matteuzzi (2015), "Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la 'paradoja de Duval'", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 18, núm. 2, pp. 177-212.

Ferrari, Marcela y Rosa María Farfán (2010), "Una socioepistemología de lo logarítmico", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 13, núm. 4, pp. 53-68.

Hart, Kathleen (1988), "Ratio and Proportion", en James Hiebert y Merlyn Behr (eds.), *Number, Concepts and Operations in the Middle Grades,* Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 198-219.

Lamon, Susan (1999), "Reasoning Proportionally", en Susan Lamon (ed.), *Teaching Fractions and Rations for Understanding*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp. 223-238.

Lee, Ai Noi y Youyan Nie (2014), "Understanding Teacher Empowerment: Teachers' perceptions of principal's and immediate supervisor's empowering behaviours, psychological empowerment and work-related outcomes", *Teaching and Teacher Education*, vol. 41, pp. 67-79.

Lesh, Richard, Thomas Post y Merlyn Behr (1988), "Proportional Reasoning", en James Hiebert y Merlyn Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 93-118.

Lezama, Javier y Elizabeth Mariscal (2008), "Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica", en Patricia Lestón (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa XXI*, México, Colegio Mexicano de Matemática Educativa/Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 889-900.

Llinares, Salvador (2013), "El desarrollo de la competencia docente 'mirar profesionalmente' la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas", *Educar em Revista,* núm. 50, pp. 117-133.

Montiel, Gisela (2009), "Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 13, núm. 4-I, pp. 69-84.

Montiel, Gisela (2011), *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*, México, Díaz de Santos.

Pajares, M. Frank (1992), "Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a messy construct", *Review of Educational Research*, vol. 62, núm. 3, pp. 307-332.

Pochulu, Marcel y Mabel Rodríguez (comp.) (2012), *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos,* Los Polvorines, Universidad de Villa María y Universidad Nacional de Villa María.

Ponte, João Pedro (1998), "Da formação ao desenvolvimento profissional", en *Actas do ProfMat 98*, Lisboa, APM, pp. 27-44.

Ponte, João Pedro, Joana Mata-Pereira e Marisa Quaresma (2013), "Ações do professor na condução de discussões matemáticas", *Quadrante*, vol. 22, núm. 2, pp. 55-81.

Pozo, Juan Ignacio (2012), "Las concepciones de los profesores sobre el aprendizaje", *5° Congreso Nacional de Educación. Antología,* tomo III, México, Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación-Editorial del Magisterio "Benito Juárez".

Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 48, pp. 360-382.

Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (en prensa), "Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber matemático en una transformación educativa?", *Revista de Ciencias de la Educación*.

Reyes-Gasperini, Daniela, Ricardo Cantoral y Gisela Montiel (2014), "Cuando una crece, la otra decrece… ¿proporcionalidad inversa o directa?", *Premisa*, vol. 16, núm. 62, pp. 3-15.

Soto, Daniela (2010), *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Soto, Daniela (2015), *La dialéctica exclusión - inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Soto, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 59, pp. 1525-1544.