



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**PERFILES  
EDUCATIVOS**

ISSN 0185-2698

**Cedillo Avalos, Tenoch Esau (2003)**

**“EL ÁLGEBRA COMO LENGUAJE ALTERNATIVO Y DE CAMBIO  
EN LAS CONCEPCIONES Y PRACTICAS DE LOS PROFESORES  
DE MATEMÁTICAS”**

**en Perfiles Educativos, Vol. 25 No. 101 pp. 50-65.**



**Centro de Estudios  
sobre la Universidad**

**iresie**

Banco de Datos sobre Educación

# *El álgebra como lenguaje alternativo* y de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas

TENOCH ESAÚ CEDILLO ÁVALOS\*



Esta investigación se efectuó durante tres años con una población de 800 profesores; el autor estudió los cambios en las concepciones y prácticas de maestros de secundaria cuando ejercen su docencia en el contexto de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional para la enseñanza del álgebra. En ese enfoque didáctico se concibe el álgebra como un lenguaje y, como consecuencia de esto, se plantea su enseñanza sobre principios similares a los que se emplean en el aprendizaje de la lengua materna. Sus resultados sugieren que esta manera de abordar la enseñanza promueve cambios importantes en sus concepciones sobre la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas escolares. En este artículo se discute el modelo didáctico que se empleó, se describen los aspectos teórico-metodológicos del proyecto y se presentan sus resultados en el marco de la literatura de investigación.

*In a research carried out during three years with a sample of 800 teachers, the author studied the transformations in concepts and practices of secondary education teachers when they practise teaching applying a non conventional didactic approach to algebra, in which algebra is seen as a language and its teaching process is based on the same principles as the teaching of mother tongue. The results suggest that this way to deal with teaching helps to promote important changes in the ideas about teaching, learning and school mathematics. In this article, the author discusses the didactic model that was used, describes the theoretical and methodological aspects of the project and presents the results within the framework of this field's research literature.*

Ideas sobre la enseñanza / Prácticas escolares / Enseñanza del álgebra / Adquisición de un lenguaje  
*Ideas about teaching / School practices / Algebra teaching / Language acquisition*

## ANTECEDENTES

El desempeño de los estudiantes en las matemáticas escolares continúa siendo un objetivo primordial en el ámbito internacional. En particular, los resultados obtenidos por los estudiantes mexicanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000) han acentuado la atención que la Secretaría de Educación Pública (SEP) dedica a la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina (SEP, 2001). El análisis de esas evaluaciones sugiere que una línea que debe atenderse para mejorar esos resultados es la generación de nuevos programas orientados a la actualización de la práctica docente y el conocimiento de la disciplina de los profesores de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas formas de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han influido en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, suponen nuevas exigencias en el desempeño de los profesores. En particular, en México se incluyeron las líneas temáticas de Preálgebra y Presentación y Tratamiento de la Información en los programas de estudio (SEP, 1993).

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto, en el que el objeto de indagación son

los comportamientos del profesor, a estudios dedicados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela elemental. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, y se convierta en un tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb, Wood y Yackel, 1990).

Los nuevos parámetros en las formas de enseñanza no sólo conllevan a atender recomendaciones primarias, como proponer a los estudiantes la resolución de diferentes tipos de problemas o promover que tengan una mayor intervención en la clase. Los resultados de investigación y el desarrollo de las teorías socioconstructivistas demandan a los profesores que cambien profundamente su conocimiento de lo que significa aprender y enseñar matemáticas. El constructivismo social parte, entre otras premisas, de que cada estudiante llega al salón de clase con sus propias ideas y que el profesor debe proporcionarle nuevas experiencias que le induzcan a coleccionar datos para afirmarlas o refutarlas.

Esto implica un nuevo acercamiento a la enseñanza; por ejemplo, ya no se considera adecuado que el docente siga página por página un libro de texto, exponga a los estudiantes los nuevos conceptos que se abordan en cada lección, y concluya el tratamiento con una colección de

\* Centro de Informática y Educación, Universidad Pedagógica Nacional, tcedillo@ajusco.upn.mx

ejercicios y problemas para que el estudiante practique y aplique las nuevas destrezas y conceptos que se vieron. En la actualidad se espera que los profesores hagan evidente en su práctica docente que están convencidos de que sus estudiantes no son “recipientes que esperan ser llenados” y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el profesor despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el docente conozca el estado de desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, que construya materiales intelectualmente ricos y propicie un ambiente de trabajo en el cual el razonamiento de los alumnos pueda ser apoyado y motivado.

El periodo de 1989 a la fecha ha sido productivo en el campo de la formación de profesores de matemáticas. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) de Estados Unidos estableció nuevas líneas de desarrollo curricular que han tenido implicaciones importantes sobre la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 1989 y 1991). A mediados de la década de los ochenta algunos investigadores empezaron a estudiar el impacto del conocimiento matemático de los profesores en sus estrategias de enseñanza (Schulman, 1986; Zimpher y Howey, 1990). Desde entonces, se argumenta que los profesores necesitarían ver las matemáticas no como un sistema fijo de ideas, sino como una forma de pensar y construir significados.

A finales de los ochenta se desarrollaron cuatro perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los profesores sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan modificando el contenido y la organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*, 1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson, Carpenter y Fennema, 1989). La postura socioconstructivista propone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus estudiantes sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticas (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991). En la siguiente sección de este artículo se discute la postura teórica que asumimos en el estudio que aquí se presenta.

A la fecha se han realizado estudios rigurosos que han delimitado un horizonte más tangible, tanto teórica como metodológicamente, sobre la enorme tarea que hay aún por realizar en la profesionalización de los profesores de matemáticas en servicio. Estos estudios reportan el largo camino que falta recorrer e importantes avances en cuanto a estrategias plausibles para auxiliar a los profesores en el cum-

plimiento de las exigencias planteadas por el currículo actual de las matemáticas escolares.

En este artículo se reporta una investigación realizada en México, que se ha retroalimentado de las aportaciones de estudios precedentes. Los resultados de esa investigación sugieren una línea promisoría en el marco de la profesionalización de los profesores de matemáticas. En los apartados que siguen se describen los aspectos centrales de esta investigación y sus resultados.

#### ESTA INVESTIGACIÓN

##### Propósitos

La investigación se llevó a cabo durante tres años (1999-2001); sus propósitos fueron los siguientes:

- Investigar el potencial de la enseñanza del álgebra como lenguaje en uso, como un factor de cambio en las concepciones y prácticas de profesores de secundaria en servicio.
- Obtener evidencia empírica que permita proponer un modelo para estudiar cómo se dan esos cambios en los profesores.

##### El enfoque de enseñanza

El enfoque para la enseñanza del álgebra como lenguaje en uso se basa en proponer el aprendizaje de esta disciplina de manera similar a la forma en que adquirimos la lengua materna (Cedillo, 1996). Un principio esencial que asumimos en este enfoque es que la lengua materna se aprende a través del uso; no parte de reglas y definiciones, sino es mediante la interlocución con los adultos que el niño

va asignando significados al lenguaje aun antes de poder emitir su primera expresión verbal y gradualmente va afinando sus estrategias de comunicación lingüística (Bruner 1982). Entre los resultados de una investigación de 12 años dedicada al estudio de la adquisición del lenguaje, Bruner reporta que la lengua materna no es sólo un subproducto del desarrollo intelectual (Piaget, 1988) y que tampoco es suficiente que el niño esté dotado con un magnífico sistema neurológico (Chomsky, 1957); además, el trabajo de Bruner aporta evidencia que señala enfáticamente que el lenguaje se enseña y que su aprendizaje se da a través de formas de interacción entre la madre y el niño claramente tipificables (Bruner, 1983). Los hallazgos de Bruner permitieron construir la metáfora que fundamenta el acercamiento al álgebra como lenguaje en uso que aquí se discute (Cedillo, 1996).

Se eligió abordar la enseñanza del álgebra como lenguaje en uso como instrumento para promover un cambio en las concepciones y prácticas de los maestros, debido a que este enfoque exige por sí mismo cambios en el docente acordes con las exigencias actuales discutidas en la sección anterior, y porque se cuenta con evidencia empírica, obtenida mediante métodos rigurosos, que muestra que los estudiantes logran importantes avances en el desarrollo de habilidades para expresar y justificar generalizaciones mediante el álgebra, cuando aprenden de ese sistema de signos mediante su uso (Cedillo, 2001a y 2001b). Entre los cambios que exige la puesta en práctica de la enseñanza del álgebra a través de su uso cabe destacar los siguientes:

- El profesor no puede partir de exponer reglas, definiciones y ejemplos; en

- lugar de esto debe proponer una actividad que le permita interactuar con los estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollen.
- El progreso de los estudiantes en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que debe aprender a escuchar a sus alumnos para aprender acerca de ellos.
  - El profesor debe admitir que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto; esto implica que él abandone la exposición como forma de interlocución, porque esto parte del supuesto de que puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo.
  - El profesor debe poder relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas de los programas oficiales; esto implica desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

#### Referente teórico

Para el diseño de este estudio se adoptó la postura teórica contenida en el siguiente principio: “En la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias”. Este principio es una combinación de lo planteado por la corriente socio-constructivista y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores y de ellos con los estudiantes; por otra parte, implica que esos individuos van modificando sus concepciones y sus acciones a partir del conocimiento que adquieren sobre las formas de razonamiento de otros sujetos (Cedillo y Kieran, 2003).

Es pertinente señalar que partimos de la convicción de que no es suficiente enunciar los cambios para que éstos se den, independientemente de los medios que se usen para motivarlos. Por esta razón, lo que propusimos en este estudio no es el discurso, oral o escrito, el vehículo para el cambio, sino elementos que se incorporan a las acciones del profesor. Todo esto, bajo el supuesto de que será la evidencia obtenida de la práctica misma que promoverá cambios en los profesores, en especial, aquellos episodios en el aula que les permiten ser testigos de lo que sus estudiantes pueden lograr sin que “ellos se lo hayan enseñado”.

#### El papel de la calculadora

La incorporación de la calculadora algebraica fue un elemento esencial en la instrumentación del enfoque didáctico que aquí se expone. Esa máquina cuenta con programas de cómputo que permiten realizar cualquier operación aritmética o algebraica de manera automatizada; esto exige al profesor cambiar el hincapié que antes hacía en el dominio de los algoritmos, para usarlos ahora como un medio, no como un fin. La máquina permite al estudiante explorar y validar/refutar sus propias conjeturas; esta característica hace factible proponer que conozca el código algebraico a través de su uso. La forma de interacción con la máquina es a través del lenguaje de la aritmética y del álgebra, lo cual propicia que el estudiante reciba retroalimentación inmediata que le permite aprender a expresarse matemáticamente en las formas convencionales de la disciplina. Por supuesto, el uso de la máquina para el logro de los fines de este estudio depende del tipo de actividad que se proponga al alumno. En Cedillo (1997, 1998, 1999a, 1999b) se

encuentran las actividades para la enseñanza mediante la calculadora que se emplearon en este estudio.

REFERENTE METODOLÓGICO

En este apartado se describe cómo se realizó este estudio. El punto de partida fue la formulación de las preguntas de investigación; esto determinó el tipo de datos que se requerían y la elección del método de recopilación y análisis de datos. También se describen los sujetos que participaron en el estudio, los instrumentos empleados para la recolección de datos y el ambiente escolar en que se realizó el trabajo de campo.

Preguntas de investigación

Las preguntas que orientaron la toma de datos y la elección del método de investigación son las siguientes:

- ¿Cuál es el estado de las concepciones y prácticas de los profesores en el marco de las exigencias del currículo actual de la educación básica?
- ¿Qué influencia ejerce en las concepciones y prácticas de los profesores abordar la enseñanza del álgebra desde el enfoque de “un lenguaje en uso”?

Método de recopilación y análisis de datos

Se eligió el método de análisis cualitativo para la recolección y análisis de datos porque el tipo de información que resulta relevante para este proyecto son episodios y narraciones sobre las prácticas y formas de razonamiento de los profesores. El análisis cualitativo es un sistema activo, lo que permite que los datos obtenidos sean una fuente de información y de generación de procesos interconectados, que dan sentido al avance de la investigación a través del tiempo. En particular, se empleó el esquema de análisis cualitativo propuesto por Miles y Huberman (1984).

Sujetos

Se seleccionaron 30 profesores, de un total de 800, para observar su trabajo a profundidad empleando la técnica de estudio de casos. Los 800 docentes atienden las clases de matemáticas en escuelas secundarias generales y técnicas que participan en el proyecto Sec 21.<sup>1</sup> Los 30 profesores fueron seleccionados de acuerdo con su experiencia docente y su dominio de la asignatura, como se muestra en el siguiente cuadro:

		<i>Dominio de la asignatura</i>	
		<i>Suficiente</i>	<i>Insuficiente</i>
<i>Experiencia</i>	Menos de 5 años	4	4
	De 10 a 15 años	3	4
	De 15 a 20 años	4	4
	Más de 20 años	3	4
Totales		14	16

En el inciso “Cuestionario”, del apartado “Fuentes de datos” se describe más ampliamente cómo fueron seleccionados. Se intentó que el número de profesoras y profesores fuera el mismo en cada categoría. Participaron en el estudio de casos 13 profesoras y 17 profesores.

#### El ambiente escolar

Los profesores y las profesoras que participaron en este estudio forman parte de la planta docente de las 79 escuelas secundarias que desarrollan el proyecto Sec 21. Al menos hay una escuela en cada entidad federativa del país en ese proyecto. La incorporación de las escuelas a Sec 21 fue voluntaria, y se dio en respuesta a una convocatoria dirigida a las Secretarías de Educación de los estados por la Secretaría de Educación Pública del gobierno federal. La convocatoria incluyó criterios que las escuelas debían cumplir respecto a la estructura física del plantel, su matrícula escolar, profesorado y directivos; además, cada entidad federativa aplicó condiciones adicionales para la selección de los planteles; en la mayor parte de los casos consideraron la consulta a profesores y directivos; en algunas entidades se eligió a las escuelas que tenían las mejores condiciones y en otras se seleccionaron planteles ubicados en zonas marginadas. Cada escuela fue equipada con red local y acceso a internet, *hardware* y *software* específicos para la enseñanza de matemáticas, física, biología, química, historia, geografía y español, respectivamente, y 60 computadoras; de éstas, 40 se instalaron en las aulas de medios y 20 fueron asignadas a los salones de clase.

Las aulas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas fueron dotadas con calculadoras algebraicas y libros para la ense-

ñanza mediante la calculadora (Cedillo, 1997, 1999a, 1999b). El número de calculadoras se determinó por el tamaño del grupo más numeroso de la escuela; esto garantizó que cada estudiante tuviera acceso individual a una máquina durante la clase. Asimismo, cada profesor recibió en préstamo una calculadora que podía conservar bajo su resguardo dentro y fuera de la escuela. Además, se dotó a cada aula de matemáticas con una pantalla de cristal líquido que permite proyectar sobre un muro la pantalla de la calculadora mientras ésta se está usando. Este accesorio fue empleado por los profesores en actividades que requerían concentrar la atención del grupo en el trabajo de alguno de sus compañeros o sobre alguna reflexión que el docente deseaba plantear. El equipamiento del aula incluyó también una computadora de escritorio con acceso a internet, una videocasetera, un monitor de televisión de 40 pulgadas que puede emplearse, además de sus funciones usuales, para que el grupo observe acciones o eventos que se están llevando a cabo mediante la computadora. Cada aula se acondicionó con mesas que pueden configurarse de distintas maneras para el trabajo individual o en pequeños equipos.

#### Fuentes de datos

Las fuentes de datos más relevantes en este estudio fueron un cuestionario inicial, los registros realizados durante las sesiones de capacitación y los registros de la interlocución cara a cara o por vía electrónica entre los profesores y el responsable de este proyecto. A continuación se describen los instrumentos empleados, las formas de interacción con los profesores y los instrumentos para el registro y análisis de los datos.

## Cuestionario

En la primera reunión de capacitación se aplicó un cuestionario para obtener información sobre la experiencia docente de los profesores, sus concepciones acerca del aprendizaje y sus prácticas de enseñanza, así como su dominio de la asignatura. Las preguntas del cuestionario se diseñaron sobre situaciones específicas de la clase de matemáticas, lo cual arrojó datos sobre el dominio que los profesores tienen de la asignatura, en el contexto de episodios con los que ellos se encuentran frecuentemente en su práctica de enseñanza.

### *Entrevista inicial*

Tuvo como propósito afinar la información obtenida de la aplicación del cuestionario. De acuerdo con las respuestas se eligieron 50 profesores para ser entrevistados de manera individual; la entrevista incluyó la observación de sus clases durante un día. Se emplearon los resultados del cuestionario y la entrevista individual para seleccionar a los 30 profesores que participaron en este estudio.

### *Sesiones de capacitación*

Cada una de las 79 escuelas recibió capacitación por lo menos tres veces en el periodo comprendido de octubre a junio, durante los años escolares 1999-2000, 2000-2001, 2001-2002. Las reuniones de capacitación fueron de 12 horas distribuidas en dos días, en general, ocho horas los viernes y cuatro horas los sábados. Los profesores que colaboraron en el estudio de casos fueron visitados al menos cuatro veces por año escolar. Las sesiones fueron videograbadas y aportaron un importante

cúmulo de datos. En estas reuniones participaban los docentes de ambos turnos con la autorización de las autoridades locales y la anuencia de los profesores para trabajar los sábados. Para cada visita había un plan de trabajo orientado por el principio de “enseñar a los profesores en la misma forma en que esperábamos que ellos enseñaran a sus estudiantes” (Cedillo y Kieran, 2003). En esas sesiones se discutía con ellos el enfoque de enseñanza, se les planteaban problemas matemáticos y se discutían las distintas formas para abordarlos, se observaban clases videograbadas o impartidas “en vivo” por el instructor y por los propios profesores, y se discutía lo observado de acuerdo con un guión de observación previamente acordado.

Esto fue posible gracias al apoyo brindado por el CONACYT (Proyecto referencia 30523), la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), que proporcionó la mayor parte de los recursos económicos para conformar un equipo de diez instructores. Éstos ya conocían el enfoque de enseñanza y el uso de la calculadora debido a que habían colaborado previamente con el responsable del proyecto (Cedillo, 1994).

### *Sesiones de autorreflexión*

Se videograbaron diez sesiones de trabajo en clase de cada uno de los 30 profesores. A solas, frente a una cámara fija, ellos observaron críticamente cada una de sus clases e hicieron un análisis de sus intervenciones, concentrándose en sus formas de interacción con los estudiantes, sus logros y dificultades. Concluían el análisis proponiendo estrategias para mejorar los avances de sus alumnos y para superar

las dificultades detectadas. Veintidós de los profesores dieron su autorización para compartir esos videos con sus colegas y recibir una retroalimentación más amplia.

### *Foros electrónicos de discusión*

Se empleó este recurso para mantener el contacto con los profesores en los tiempos entre una visita a la escuela y la siguiente. El foro se llevó a cabo como una actividad permanente por medio de la página electrónica del proyecto.<sup>2</sup> La participación fue voluntaria, con la frecuencia que cada quien considerara pertinente. Los temas del foro de discusión fueron los siguientes:

- Dificultades de los alumnos en la realización de una actividad específica.
- Dificultades de los profesores en la realización de una actividad específica.
- Respuestas no esperadas de los alumnos a una actividad específica.
- Experiencias de enseñanza con poco éxito respecto a una actividad específica.
- Experiencias de enseñanza exitosas respecto a una actividad específica.
- Distintas maneras de resolver un problema específico.
- Nuevas actividades diseñadas por los profesores.
- Dificultades técnicas con la calculadora.
- Dificultades técnicas con la computadora.

La comunicación entre profesores, y entre éstos con el responsable del proyecto, proporcionó datos importantes sobre el potencial de la comunicación mediada por la computadora como una herramienta para la formación a distancia de profesores de matemáticas en servicio.

### Categorías de análisis

Las categorías que se describen a continuación fueron construidas por Franke, Fennema y Carpenter (1997) y se usaron en esta investigación para valorar si se daban o no cambios en las concepciones y prácticas de los profesores, y en qué consistían éstos. Para aplicarlas se hicieron adecuaciones teniendo como marco de referencia el currículo de matemáticas y las condiciones de trabajo de las escuelas en México. Esas categorías de análisis permiten distinguir cuatro niveles de desempeño mediante los que se intenta caracterizar las concepciones y prácticas de los profesores en el ámbito de las exigencias de enseñanza actuales y, además, proporcionan un referente para hacer un seguimiento de la evolución de los docentes a lo largo de los tres años en que se realizó el trabajo de campo.

#### *Concepciones de un profesor en el nivel 1*

- No cree que sus estudiantes puedan resolver problemas, a menos que él les haya enseñando cómo hacerlo.
- Está convencido de que todos los alumnos resolverán un problema en formas muy similares (las que él les ha enseñando).
- No considera importante acudir a la ayuda de colegas más expertos para decidir qué y cuándo enseñar.

#### *Prácticas de un profesor en el nivel 1*

- No propicia oportunidades para que los estudiantes resuelvan problemas usando sus propias estrategias, ni les pregunta cómo razonaron para resolverlo.
- Enseña a los estudiantes las estrategias y procedimientos que le gustaría que

ellos usen para resolver un problema dado.

- Exige que los estudiantes usen los procedimientos que les enseñó y asume la reproducción de estos procedimientos como sinónimo de comprensión.

### *Concepciones de un profesor en el nivel 2*

- Eventualmente acepta que los estudiantes aportan conocimiento en situaciones de aprendizaje.
- No está aún convencido de que no tiene que enseñar a los estudiantes cómo resolver un problema.
- Empieza a creer que los estudiantes pueden resolver problemas sin que se les haya enseñado explícitamente.
- No rechaza que las distintas soluciones que desarrollan los estudiantes pueden ser de alguna utilidad.
- Eventualmente cree conveniente aumentar la dificultad de los problemas que propone.

### *Prácticas de un profesor en el nivel 2*

- Genera algunas oportunidades para que los estudiantes resuelvan problemas empleando sus propias estrategias y en ocasiones les pregunta cómo razonaron.
- Aunque eventualmente considera relevante que los estudiantes expresen sus propios razonamientos, no abandona su intención de conducirlos paso a paso en la solución de problemas.
- Cuando da a los estudiantes la oportunidad de exponer sus estrategias e ideas, es sólo con el propósito de que las compartan con sus compañeros, no para entender mejor la forma en que ellos aprenden.

### *Concepciones de un profesor en el nivel 3*

- Acepta que sus estudiantes pueden resolver cierto tipo de problemas y ofrecer soluciones distintas de las que él espera.
- Considera que una parte de la enseñanza consiste en apoyar el desarrollo de estrategias distintas planteando problemas que difieren en estructura y contexto.
- Acepta que algunos estudiantes intentarán resolver un problema dado en formas diferentes y que distintos problemas darán lugar a estrategias diversas.
- Cree que es benéfico para los estudiantes resolver problemas empleando sus propias estrategias, porque esto permite que le den un mejor sentido a los problemas planteados y a sus conocimientos.
- Empieza a aceptar que aprende cuando escucha a sus estudiantes.

### *Prácticas de un profesor en el nivel 3*

- Quiere que los estudiantes entiendan lo que están haciendo.
- Proporciona una variedad de problemas para que los estudiantes los enfrenten y les da la oportunidad de discutir sus soluciones.
- Analiza las respuestas de sus estudiantes e identifica las diferencias en ellas.
- Escucha a los estudiantes y les pregunta si algunos han resuelto el mismo problema en una forma distinta.

### *Concepciones de un profesor en el nivel 4*

- Ha generado un marco conceptual sobre las formas de razonamiento de los estudiantes que le permite entender cómo evolucionan.

- Está convencido de que su papel es crear condiciones para que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Está convencido de que la evolución del pensamiento matemático de sus estudiantes debe determinar el desarrollo del programa escolar.
- Está convencido de que los estudiantes pueden resolver problemas sin necesidad de una instrucción explícita y que entender las formas en que los estudiantes razonan le ayuda a diseñar mejores estrategias de enseñanza.

*Prácticas de un profesor en el nivel 4*

- Usa lo que sabe de sus estudiantes para diseñar las actividades de enseñanza.
- Desarrolla el curso en consonancia con lo que los alumnos van aprendiendo.
- Propone problemas distintos a cada equipo de trabajo y en ocasiones a cada estudiante.
- Cada problema que propone es un nuevo reto para sus estudiantes.

- Evalúa el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que éstos desarrollan.

RESULTADOS

Los resultados de este estudio se exponen de la siguiente manera: primero presentaremos un resumen que muestra cómo se dieron los cambios en los profesores a lo largo de los tres años que duró esta investigación. Después se analizan estos cambios año por año, en el marco de la experiencia y dominio de la asignatura de los profesores. Por último, se discuten cuáles parecen ser los factores que propiciaron el cambio.

Esquema global del cambio en los profesores

El cuadro que se presenta a continuación resume los cambios que se registraron en los 30 profesores a lo largo de los tres años del estudio.

	<i>Perfil inicial</i>	<i>Perfil final del primer año</i>	<i>Perfil final del segundo año</i>	<i>Perfil final del tercer año</i>
<i>Nivel 1</i>	25	22	4	2
<i>Nivel 2</i>	5	7	21	8
<i>Nivel 3</i>	0	1	5	10
<i>Nivel 4</i>	0	0	0	10

La columna “Perfil inicial” muestra que al principio del estudio, como resultado del cuestionario y la entrevista iniciales, 25 de los 30 profesores tenían perfiles correspondientes a la categoría “nivel 1”. Es decir, sus concepciones y prácticas estaban arraigadas en formas de enseñanza que requieren modificarse de acuerdo

con las exigencias del currículo actual de las matemáticas escolares. Los datos recabados muestran que esos profesores eran demasiado directivos en la clase, no daban oportunidad a que los alumnos abordaran por sí mismos una tarea, los dirigían paso a paso en la resolución de un problema, y cuando daban oportuni-

dad para que los estudiantes intervinieran era para que completaran con una palabra una idea del profesor y sólo les preguntaban a sus alumnos cosas que ellos ya sabían. Sólo 5 de los 30 profesores mostraron rasgos que los ubicaron en la categoría de análisis correspondiente al nivel 2. No hubo casos que se ubicaran en los niveles 3 y 4.

La columna “Final del primer año” muestra que hubo un ligero cambio; tres de los 25 profesores del nivel 1 empezaron a modificar sus prácticas. En particular, dejaron de situarse al frente del salón para exponer el tema de una lección, desarrollaban la clase a partir de una actividad que les permitía interactuar con los equipos de trabajo y empezaban a dar atención individual a sus estudiantes, en particular, porque les llamaba la atención que hubieran resuelto un problema en una forma distinta de la que ellos esperaban.

Uno de los profesores del nivel 2 mostró modificaciones en sus prácticas y concepciones que permitieron ubicarlo en el nivel 3. Este profesor empezó a clasificar los problemas en “aquellos que los estudiantes podían resolver sin instrucción previa” y los “que necesitaban su intervención”. Asimismo, empezó a relatar situaciones en las que había aprendido de lo que proponían sus alumnos.

Los cambios que se presentaron durante el primer año sugieren que difícilmente podríamos esperar modificaciones sustanciales en las prácticas de los profesores en tiempos reducidos.

La columna “Final del segundo año” muestra resultados alentadores; 18 de los 22 profesores ubicados en el nivel 1 mostraron modificaciones que los ubican en el nivel 2 y tres de los siete profesores en el nivel 2 se ubicaron en el nivel 3. En los encuentros con estos profesores al térmi-

no del segundo año se les pidió que hicieran un ensayo de autoevaluación de su desempeño; una respuesta que caracteriza sus juicios es la siguiente:

En el primer año del proyecto nos sentíamos rebasados, eran muchas exigencias, estábamos acostumbrados a seguir el libro de texto; además, muchos llevábamos muchos años dando el curso de un mismo grado y ya ni siquiera tomábamos en cuenta lo que venía antes o lo que seguía. Los instructores del proyecto están muy bien preparados; nosotros no sabíamos tanto, no nos imaginábamos cómo cubrir el programa si estábamos brincando de aquí para allá (*sic*) tratando de seguir el ritmo de los alumnos; algunos queríamos pedirles que mejor ya no nos observaran ni nos entrevistaran, queríamos seguir en el proyecto, pero sin tantas presiones. Lo que nos impulsó a seguir fue ver que los alumnos llegaban motivados a la clase y que estaban aprendiendo, aunque nosotros no les estuviéramos enseñando; parece que la calculadora les ayuda. Al principio creíamos que no los iba a dejar aprender lo que es importante, después nos dimos cuenta que la calculadora sólo hace lo que los alumnos están pensando: ellos tienen que pensar para poder usarla, quizás por eso ahora están aprendiendo más. El primer año fue difícil; para el segundo año ya teníamos una mejor comprensión de las cosas.

La columna “Final del tercer año” muestra que al término del estudio hubo dos profesores que se mantuvieron en el nivel 1 durante los tres años; ocho llegaron al nivel 2, de éstos ocho, dos provienen del nivel 1 y seis se mantuvieron en el nivel 2. En el nivel 3 concluyeron diez profesores, todos del nivel 2. Finalmente, diez profesores alcanzaron el nivel 4, de ellos cinco provienen del nivel 3 y cinco del nivel 2.

Si se lee el cuadro horizontalmente se aprecia lo siguiente:

Al inicio del estudio 83.3% de los profesores estaban en el nivel 1 y 16.7% en el nivel 2.

Al final del primer año, sólo 13.3% de los profesores cambiaron un nivel, 10% al nivel 2 y 3.3% pasaron del nivel 2 al 3.

Al final del segundo año, 73.33% de los profesores avanzaron un nivel, 60% del nivel 1 al 2 y 13.3% del nivel 2 al 3.

Al final del tercer año, 73.3% de los profesores cambiaron de nivel, 6.6% del nivel 1 al 2, 33.3% del nivel 2 al 3, 16.6% cambió del nivel 2 al 4 (cinco profesores) y 16.6% cambió del nivel 3 al 4.

Estos datos muestran que dos profesores se mantuvieron en el nivel 1. Un profesor que inició en el nivel 1 y alcanzó el 4, seis profesores cambiaron sólo un nivel (del 1 al 2) y que 23 profesores avanzaron dos.

Análisis respecto a experiencia y dominio de la asignatura

Los profesores más resistentes al cambio fueron los que tenían más años de experiencia docente, entre ellos están los dos profesores que se mantuvieron en el nivel 1. De acuerdo con los datos recabados, su resistencia se debió a que ellos se consideraban buenos profesores, de hecho tenían un magnífico prestigio en su comunidad y el reconocimiento de los alumnos, padres de familia y directivos. Su posición puede resumirse en la expresión de uno de ellos:

Llevo muchos años como maestro, he aprendido cómo hacer las cosas bien, yo tengo mis propios métodos y los buenos resultados que obtengo cada año con mis estudiantes lo confirman; entonces, si ya conozco un camino

que resulta acertado, ¿por qué debo arriesgarlo con algo que no conozco y que no entiendo? Además, en poco tiempo creo que me jubilaré.

Ese caso contrasta con el del profesor que avanzó del nivel 1 al nivel 4; él cuenta con la mayor experiencia en número de años en el grupo de los 30 profesores y un buen prestigio en su comunidad. Una de las explicaciones plausibles para explicar este contraste es que este profesor posee un excelente dominio de los contenidos que enseña. Él lo explica de la siguiente manera:

Al principio creí que era un proyecto más, que en el momento está de moda y que en poco tiempo se abandona; es más, creí que después de la primera reunión de capacitación nunca los volvería a ver. Su frecuente presencia en la escuela, las discusiones que tuvimos y, sobre todo, lo que noté que aprendían los estudiantes, me indicó que era algo que valía la pena intentar, que había muchas cosas nuevas e interesantes que en la práctica funcionaban. Lo que más me interesa a mí son mis alumnos, entonces decidí que aunque ya estuviera viejo debería esforzarme y hacer la prueba, estaba pensando jubilarme pero esto vale la pena y aquí seguiré por un buen tiempo.

Entre los profesores con menos experiencia el dominio de la asignatura parece ser determinante. Los que más avanzaron son los que tienen un conocimiento más sólido de la materia que enseñan. Los datos que recabamos muestran que los profesores que al inicio del estudio estaban en el nivel 2 fueron catalogados con un buen conocimiento de su asignatura. Esos cinco profesores se movieron del nivel 2 al nivel 4 en los tres años del estudio.

Una característica que distinguió a los profesores con poca experiencia y un

dominio insuficiente de la asignatura es su buena actitud hacia el proyecto durante los tres años de trabajo. Esto sugiere que con un poco más de tiempo, y el apoyo pertinente, estos profesores podrían lograr un mejor conocimiento de la materia que imparten y alcanzar una formación docente más acorde a los requerimientos actuales.

Los casos que requirieron más atención fueron los de los profesores con más años en servicio y un dominio insuficiente de la asignatura. No obstante, éstos lograron avanzar al menos un nivel en el marco de las categorías de análisis que se emplearon. Una explicación posible para el cambio que lograron estos profesores es su participación en un grupo que adquirió una aceptable cohesión con el tiempo. Los datos de esta investigación sugieren que el compañerismo que mostraban sus colegas, en particular los que iban logrando más intervenciones exitosas en los foros de discusión, los impulsó a cambiar su actitud y desarrollar un esfuerzo extraordinario. El siguiente extracto corresponde a una comunicación durante el foro electrónico:

Quiero agradecer el apoyo que me han dado los compañeros. Hubo momentos en que estaba a punto de no participar más porque me apenaban las consultas que hacía, pero siempre había alguien que amablemente me ayudaba. Por otra parte, mis alumnos me estaban dejando atrás, ellos podían resolver problemas que yo no entendía, a veces no tenía posibilidad de decirles si lo que habían hecho era correcto o no; mis alumnos no se daban cuenta de esto porque eran ellos los que me mostraban sus soluciones y me las explicaban. Finalmente decidí decirles que en la clase todos estábamos aprendiendo, que a veces yo iba adelante de ellos, pero en otras ellos llevaban la delantera,

que quería que aprendiéramos juntos y que nos apoyáramos entre todos. Sé que aún me falta mucho por aprender, por ahora puedo decir que ya aprendí que lo que nunca haré será pedir que me den la solución de un problema; cuando algo se me complique demasiado sólo pediré pistas; si quiero avanzar debo resolverlo por mí mismo, no importa que me tome mucho tiempo hacerlo.

#### Comentarios finales

Los resultados de este estudio indican que el cambio es un proceso, no un evento, y que en las concepciones y prácticas de los profesores en servicio requiere una fuerte inversión financiera y mucha dedicación. No es poco el tiempo de atención a los profesores que se requiere para lograr modificaciones tangibles; a pesar de que el acercamiento se dio con mucha intensidad y un sustento importante, no consideramos que los tres años en que se mantuvo el contacto con ellos sean suficientes. En particular, aún es necesario recabar información que nos permita conocer el nivel de autonomía que han logrado.

Al final del estudio, 28 de los 30 profesores mostraron cambios observables en sus prácticas (93%), sin embargo, puesto que fueron atendidos de manera distinta no es posible hacer ninguna extrapolación acerca de lo que ocurrió con los 770 profesores que participaron en el proyecto. La atención diferenciada a que nos referimos es el trabajo que se realizó con los docentes durante las entrevistas individuales y su participación en el foro de discusión. Como puede verse en los extractos mostrados en la sección anterior, esas acciones fueron un apoyo extra para ellos.

Pueden hacerse algunas afirmaciones generales sobre los profesores que no par-

ticiparon en el estudio de casos; sin duda aprendieron bastante respecto a otras formas de organizar el trabajo en el aula, y también aprendieron sobre el uso de la tecnología electrónica como herramienta para la enseñanza y nuevas formas para valorar los avances de sus estudiantes. Asimismo, sin contar con la información detallada que se obtuvo durante el estudio de casos, podría afirmarse que hubo otros profesores que modificaron sus prácticas y concepciones de manera importante. Un dato que podría extrapolarse con un nivel de confianza aceptable es que el porcentaje de quienes se ubicaron en el nivel 1 debe aproximarse bastante a la proporción de profesores en ese nivel en el total de la población. Este resultado muestra la magnitud de lo que todavía debe hacerse en el ámbito de la profesionalización de los profesores en servicio.

En el proyecto no todo fueron éxitos; la comunicación mediante el correo electrónico aún no es un recurso estable debido a la insuficiente posibilidad de conexión en el país, al menos en cuanto a la

instalada en las escuelas públicas. Buena parte de los profesores que se mantuvieron en comunicación por esta vía lo hacían desde sus casas o desde alguna institución de educación superior con la que mantenían alguna relación; algunos lo hicieron desde un cibercafé.

Otro aspecto que cabe resaltar es la intervención de los directivos. Los datos recabados muestran que el éxito del trabajo en la escuela depende sensiblemente de la forma en que ellos se involucren. Se encontraron casos en que a pesar de un magnífico desempeño de los profesores, un directivo puede obstaculizar su tarea al grado de hacerla ineficiente. Este rubro debe atenderse de manera especial en la instrumentación de proyectos de este tipo.

Por último, podemos concluir que los datos recabados proporcionan evidencia de que incidir en la práctica de los profesores mediante propuestas que produzcan resultados tangibles en el aprovechamiento de los estudiantes, es una alternativa plausible si queremos enriquecer la formación de los profesores en servicio.

#### NOTAS

1. Proyecto auspiciado por la Secretaría de Educación Pública (SEP), el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) y la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). La investigación también fue apoyada con recursos del Proyecto CONACYT, referencia 30523.

#### REFERENCIAS

- BALL, D. L. (1988), *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*, East Lansing, Michigan State University.
- BEATON, A.E. et al. (1996), *Mathematics achievement in the middle school years. Third International Mathematics and Science Study*, Chesnut Hill, MA, International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College.
- BRUNER, J. (1982), "The formats of language acquisition", en

*American Journal of Semiotics*, vol. 1, núm. 3, pp. 1-16.

— (1983), *Child's talk*, Nueva York, Norton.

CARPENTER, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey (1988), "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, pp. 385-401.

— (1994), "Matemáticas en la escuela secundaria: la calculadora como apoyo en la enseñanza del álgebra. Didáctica y currículum: Reportes de investigación seleccionados", 40-56, México, SEP-CONACYT.

CEDILLO, T. (1994), "Introducing algebra with programmable calculators", en North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA), vol. XVI, Louisiana State University-Baton Rouge.

— (1996), "Algebra as a language in-use: A study with 12-13 year olds using graphic calculators", tesis doctoral, Londres, University of London, Institute of Education.

— (1997), *Calculadoras: introducción al álgebra*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

- (1998), *Sentido numérico e iniciación al álgebra. La calculadora en el salón de clase*, vol. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- (1999a), *Desarrollo e habilidades algebraicas. La calculadora en el salón de clase*, vol. 3, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- (1999b), *Nubes de puntos y modelación algebraica. La calculadora en el salón de clase*, vol. 4, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- (2001a), "Toward an algebra acquisition support system: A study using graphic calculators with 12-13 year olds", en *Mathematical Thinking and Learning* (Mahwah, Nueva Jersey), vol. 3, núm. 4, pp. 221-260.
- (2001b), "Learning algebra by using it: A promising approach to using calculators in the classroom", en H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent y John Vincent (eds.), *The future of the teaching and learning of algebra*, Proceedings of the 12th ICM Study Conference, Australia, The University of Melbourne.
- CEDILLO, T., y C. Kieran (2003), "Initiating students into algebra with symbol-manipulating calculators", en J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education*, cap. 13, Reston VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 219-239.
- CHOMSKY, N. (1957), *Learning and the structure of language*, Chicago, University of Chicago.
- COBB, P., T. Wood y E. Yackel (1990), "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, núm. 4, pp. 125-146.
- FENNEMA, E. et al. (1996), "A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction", en *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 27, pp. 403-434.
- FRANKE, M., E. Fennema, y T. Carpenter (1997), "Changing teachers: interactions between beliefs and classroom practice", en E. Fennema y B. Scott Nelson (eds.), *Mathematics teachers in transition*, Mahwah, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.
- KILPATRICK, J. A. (1992), "History of research in mathematics education", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Nueva York, National Council of Teachers of Mathematics, MacMillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, pp. 3-38.
- MCDIARMID, G. W. y S. M. Wilson (1991), "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?", en *Journal of Teacher Education*, vol. 42, núm. 2, pp. 93-103.
- MILES, M. Y A. Huberman (1984), *Qualitative data analysis, a sourcebook of new methods*, Londres, Sage Publications.
- NATIONAL Council of Teachers of Mathematics (1989), *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA, NCTM.
- (1991), *Professional standards for the teaching of mathematics*, Reston, VA, NCTM.
- ORGANISATION for Economic Cooperation and Development (OECD) (2000), "The PISA 2000. Assessment of reading, mathematical and scientific literacy", en *Programme for International Student Assessment*, Paris, OECD.
- PETERSON, P., T. Carpenter y E. Fennema. E. (1989), "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en *Journal of Educational Psychology*, vol. 81, núm. 4, 1989, pp. 558-569.
- PIAGET, J. (1988), *La psicología de la inteligencia*, México, Grijalbo.
- SCHIFTER, D. (1993), "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 12, pp. 271-283.
- SCHIFTER, D. y C. T. Fosnot (1993), *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform*, Nueva York, Teachers College Press.
- SCHIFTER, D. y M. A. Simon (1992), "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en *Teaching and Teacher Education*, vol. 8, núm. 2, pp. 187-197.
- SECRETARÍA de Educación Pública (SEP), *Plan y programas de estudio de educación básica. Secundaria*, México, SEP/ Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- (1991), *Programa Nacional de Educación, 2001-2006*, México, SEP.
- SHULMAN, L. S. (1986), "Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective", en M. C. Whittrock (ed.), *Handbook of research on teaching*, Nueva York, Macmillan.
- THOMPSON, A. (1992), "Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research", en D. A. Grows (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- ZIMPHER, N. L. y K. R. Howey (1990), "Scholarly inquiry into teacher education in the United States", en R. P. Tisher y M. F. Wideen (eds.), *Research in teacher education: International perspectives*, Nueva York, The Falmer Press.